Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Métodos de la Física Matemática I

Tarea Nº 2
Publicada el 3 de Mayo de 2002

Profesor: José Rogan
Ayudante: Xavier Andrade.

1. Resuelva la ecuación de Laplace $\nabla^2\varphi = 0$ en coordenadas cilíndricas para $\varphi = \varphi(r)$.

2. La dirección de un vector esta dada por los ángulos θ_1 y φ_1. Para un segundo vector los correspondientes ángulos son θ_2 y φ_2. Muestre que el coseno del ángulo entre estos dos vectores esta dado por

$$\cos\gamma = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ .$$

3. Muestre que la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

es aun separable en coordenadas cilíndricas si k^2 es generalizado a

$$k^2 + f\left(1\rho^2\right) g(\varphi) + h(z) \ .$$

4. Para el caso especial del espacio tridimensional (ε_1, ε_2, ε_3 definiendo un sistema coordenado no necesariamente ortogonal) muestre que los vectores de la base reciproca son

$$\varepsilon^i = \frac{\varepsilon_j \times \varepsilon_k}{\varepsilon_j \times \varepsilon_k \cdot \varepsilon_i} \ ,$$

con $i, j, k = 1, 2, 3$.

5. Verifique la identidad de Jacobi,

$$[A,[B,C]] = [B,[A,C]] - [C,[A,B]]$$

6. Una rotación $\varphi_1 + \varphi_2$ alrededor del eje z es llevada a cabo como dos roatciones sucesivas φ_1 y φ_2, cada una alrededor del eje z. Use la representacion matricial de las rotaciones para derivar las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\
\sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= \sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2
\end{aligned}$$

7. Dos matrices U y H están relacionadas por

$$\mathsf{U} = e^{ia\mathsf{H}}$$

con a real.

(a) Si H es hermítico, muestre que U es unitario.

(b) Si U es unitario, muestre que H es hermítico. (H es independiente de a.)

(c) Muestre que si una matriz es a la vez hermítica y unitaria sus autovalores son ± 1.

Fecha de entrega: Viernes 10 de Mayo 7:30 pm