Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Métodos de la Física Matemática I

Tarea Nº 4 — Profesor: José Rogan
Publicada el 24 de Junio de 2002 — Ayudante: Xavier Andrade.

1. (a) Demuestre el teorema del circulo de Milne-Thomson:
   - En un dominio infinito el potencial complejo de velocidades es $\omega_\infty(z) = f(z)$, uan función analitica.
   - Las singularidades de $f(z)$ estan fuera de $|z| = a$.
   - Entonces el potencial fuera de un problema equivalente pero con un circulo rigido con centro $z = 0$ y radio a es

   $$\omega(z) = f(z) + f\left(\frac{a^2}{z}\right)$$

   (b) Encuentre el potencial complejo y el campo de velocidades de una fuente lineal en el punto z_o, ubicada afuera de un cilindro rigido de radio a.

2. Usando $f\left(re^{i\theta}\right) = R(r,\theta)\, e^{i\Theta(r,\theta)}$, en donde R y Θ son funciones diferenciables de r y θ, muestre que las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares se convierten en

   (a)
   $$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \ ,$$

   (b)
   $$\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \theta} = -R\frac{\partial \Theta}{\partial r} \ .$$

3. La función (z) es analítica, Muestre que la derivada de de $f(z)$ con respecto a Z^* es cero.

4. Suponiendo que $f(z)$ es analítica sobre y dentro de un contorno C y que el punto z_0 esta dentro de C, muestre que

   $$\oint_C \frac{f'(z)}{(z - z_0)}\, dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_o)^2}\, dz \ .$$

5. Sea $f(z)$ analítica en un contorno cerrado C. Pruebe por inducción que:

   $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \ , dz \ .$$

6. Pruebe que la expansión de Laurent de una función dada en torno a un punto dado es unica. Esto significa que, si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \left(z - z_o\right)^n \ ,$$

entonces $a_n = b_n$ para todo n.

Fecha de entrega: Lunes 1 de Julio.