Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Métodos de la Física Matemática I

Tarea Nº 7 — Profesor: José Rogan
Publicada el 9 de Mayo de 2003 — Ayudante: Claudia Loyola

Entregar el 16 de Mayo, antes de las 12:00 hrs.

1. Muestre que

   a) $\operatorname{sen}^{-1} z = -i\ln(iz \pm \sqrt{1-z^2})$.

   b) $\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2-1})$.

   c) $\tanh^{-1} z = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$.

2. La ecuación de movimiento de una masa m relativa a un sistema de coordenadas rotatorio es

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2m\left(\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right) - m\left(\frac{d\vec{\omega}}{dy}\times\vec{r}\right) \ .$$

   Considere el caso $\vec{F}=0$, $\vec{r}=\hat{x}x+\hat{y}y$, y $\vec{\omega}=\omega\hat{z}$, con ω constante. Muestre que el reemplazo $\vec{r}=\hat{x}x+\hat{y}y$ por $z=x+iy$ produce

$$\frac{d^2z}{dt^2} + i2\omega\frac{d\vec{z}}{dt} - \omega^2 z = 0 \ .$$

   Resuelva esta ecuación diferencial sustituyendo $z = fe^{-i\omega t}$.

3. ¿Qué parte del plano complejo z corresponde al interior de un círculo unitario en el plano ω, si

   a) $\omega = \dfrac{z-1}{z+1}$,

   b) $\omega = \dfrac{z-i}{z+i}$?