Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Métodos de la Física Matemática I

Tarea Nº 9 — Profesor: José Rogan
Publicada el 13 de Junio de 2003 — Ayudante: Claudia Loyola

Entregar el 20 de Junio, antes de las 12:00 hrs.

1. Muestre que las series $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ y $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$, son las continuaciones analíticas de una respecto a la otra.

2. Escribir las dos series de Laurent en potencias de z que representan la función
$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$$
en ciertos dominios, y especificar esos dominios

3. Hallar el desarrollo en serie de Laurent para la función $\frac{1}{z-a}$ en el dominio $|a| < |z| < \infty$, donde a es real y $-1 < a < 1$. A continuación, escribir $z = e^{i\theta}$ para obtener las fórmulas de suma
$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(n\theta) = \frac{a\cos(\theta) - a^2}{1 - 2a\cos(\theta) + a^2} \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{a\operatorname{sen}(\theta)}{1 - 2a\cos(\theta) + a^2}$$

4. Sea f una función análitica en un dominio anular ($R_1 < |z - z_0| < R_2$) en torno del origen que contiene al círculo unidad $z = e^{i\phi}$ ($-\pi \leq \phi \leq \pi$). Tomando ese círculo como camino de integración para obtener los coeficientes a_n y a_{-n} en una serie de Laurent en potencias de z, probar que
$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})d\phi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})[(\frac{z}{e^{i\phi}})^n + (\frac{e^{i\phi}}{z})^n]d\phi$$
cuando z es cualquier punto del dominio anular.

   Haciendo $u(\theta) = Re[f(e^{i\phi})]$, probar que del desarrollo de la parte anterior se sigue
$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)d\phi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)cos[n(\theta - \phi)]d\phi$$

   Esta es una forma de escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función real $u(\theta)$ en el intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$. La restricción sobre $u(\theta)$ es más severa de lo necesario para que sea factible tal representación en serie de Fourier.

5. Describir una superficie de Riemann para la función multivaluada

$$f(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$