Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Métodos de la Física Matemática I

Tarea Nº 1
11 de Abril de 2008

Profesor: José Rogan
Ayudantes: Max Ramírez
Alejandro Varas

Los problemas que están marcados por $\boxed{\text{\LaTeX}}$ deben ser entregados en un pdf, generado a partir de LaTeX.

1. La matriz $\boxed{\text{\LaTeX}}$
$$[R] = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
representa una rotación en θ. Muestre que las matrices $[R^2] = [R][R]$ y $[R^3] = [R][R][R]$ son matrices que corresponden a rotaciones en 2θ y 3θ, respectivamente.

2. Pruebe las siguientes identidades vectoriales utilizando notación de Einstein:

   a) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$.
   b) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.
   c) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$.
   d) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = [(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{D}]\vec{C} - [(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}]\vec{D}$.

3. Considere el potencial escalar en dos dimensiones
$$\Phi(x, y) = x^3 - 3y^2x \ .$$

   a) Grafique las líneas equipotenciales para tres valores negativos y tres valores positivos de Φ.
   b) Calcule $\vec{\nabla}\Phi$.
   c) Muestre que la familia de curvas que corresponden a las líneas de campo de $\vec{\nabla}\Phi$ están dadas por
   $$3x^2y - y^3 = \text{constante}.$$
   para diferentes constantes.
   d) Grafique seis líneas de campo representativas de $\vec{\nabla}\Phi$. Asegúrese de indicar la dirección del campo y comente sobre su magnitud.
   e) Calcule la divergencia del campo vectorial $\vec{\nabla}\Phi$ y muestre que las líneas de campo de la parte (d) coinciden con esta divergencia.

4. Pruebe las siguientes identidades vectoriales utilizando notación de Einstein: $\boxed{\text{\LaTeX}}$

   a) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$, donde f es un campo escalar.
   b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$.

   c) $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$.

5. Use los teoremas de operadores diferenciales para calcular

$$\oint_S d\vec{\sigma}\cdot\vec{v}\ ,$$

   donde S es la superficie de una esfera de radio R centrada en el origen, y $\vec{v}$ es

   a) $\vec{v} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$.
   b) $\vec{v} = x^3\hat{x} + y^3\hat{y} + z^3\hat{z}$.
   c) $\vec{v} = x^5\hat{x} + y^5\hat{y} + z^5\hat{z}$.

   Utilice coordenadas esféricas.

6. Un sistema de coordenadas toroidal segundo está descrito por las coordenadas (ξ, η, φ), y se relacionan con el sistema cartesiano por LaTeX

$$\begin{aligned} x &= \frac{a\,\mathrm{senh}\,\eta\cos\varphi}{\cosh\eta - \cos\xi}\ , \\ y &= \frac{a\,\mathrm{senh}\,\eta\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\cosh\eta - \cos\xi}\ , \\ z &= \frac{a\,\mathrm{sen}\,\xi}{\cosh\eta - \cos\xi}\ . \end{aligned}$$

   a) Calcule los factores de escala h_i.
   b) Escriba el vector posición $\vec{r}$ en términos de $(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\varphi})$.
   c) Calcule la divergencia de $\vec{r}$ para este sistema de coordenadas.

7. Use notación de Einstein para mostrar que las expresiones

$$\left(\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{C}\right)\times\vec{D} \qquad \text{y} \qquad \overleftrightarrow{T}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)$$

   no son necesariamente iguales.

8. Sean las componentes del tensor de conductividad en el sistema cartesiano

$$\overleftrightarrow{\sigma} = [\sigma] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

   Encuentre un vector campo eléctrico, y especifique sus coordenadas, tal que se obtenga una densidad de corriente que sea paralela a este campo eléctrico.

9. Muestre que el producto cruz $\vec{A}\times\vec{B}$ expresado en un sistema inclinado de coordenadas puede ser escrito como

$$A^i B^j \hat{g}^k \upsilon \epsilon_{ijk}$$

   y determine υ.

10. Sea

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Muestre que

$$K^n = KKK \cdots (n \,\text{factores}) = 1 \ .$$

11. Verifique la identidad de Jacobi $\boxed{\text{\LaTeX}}$

$$[A,[B,C]] = [B,[A,C]] - [C,[A,B]] \ .$$

12. Muestre que $c^2B^2 - E^2$ es un escalar invariante.

13. Cuatro operaciones posibles en el plano x-y son:

    i) Identidad $\begin{cases} x \to x \\ y \to y \end{cases}$

    ii) Inversión $\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$

    iii) Reflexión $\begin{cases} x \to -x \\ y \to y \end{cases}$

    iv) Reflexión $\begin{cases} x \to x \\ y \to -y \end{cases}$

    a) Muestre que estas cuatro operaciones forman un grupo.

    b) Muestre que este grupo es isomorfo al *vierergruppe*.

    c) Construya una representación matricial de 2 x 2.

14. El potencial eléctrico exterior para una esfera con hemisferios a potencial $+V$ y $-V$, se puede escribir en términos de la serie

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+3) \frac{(2s-1)!!}{(2s+2)!!} \ .$$

Pruebe la convergencia de ella.

15. La aproximación de Blöch-Gruneissen para la resistencia en un metal monovalente es $\boxed{\text{\LaTeX}}$

$$\rho = C \frac{T^5}{\Theta^6} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^5 \, dx}{(e^x - 1)(1 - e^{-x})} \ ,$$

donde Θ es la temperatura de Debye característica del metal.

a) Para $T \to \infty$ muestre que

$$\rho \approx \frac{C}{4} \cdot \frac{T}{\Theta^2} \ .$$

b) Para $T \to 0$ muestre que

$$\rho \approx 5!\zeta(5) C \cdot \frac{T^5}{\Theta^6} \ .$$

16. Una partícula atómica está confinada dentro de una caja rectangular de lados a, b y c. La partícula está descrita por una función de onda ψ la cual satisface la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \ .$$

La función de onda debe cumplir que se haga cero en cada cara de la caja. Esto impone condiciones sobre las constantes de separación, y por lo tanto en la energía E. Demuestre que la energía mínima que cumple todas estas condiciones es

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \ .$$

17. La ecuación de Schrödinger para una partícula en un potencial $V = \frac{1}{2}kx^2$ es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi(x) = E\psi(x) \ .$$

a) Usando que $\xi = ax$ y una constante λ, tenemos

$$a = \left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{1/4} \ ,$$

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} \ .$$

Muestre que

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi(\xi) = 0 \ .$$

b) Sustituyendo

$$\psi(\xi) = y(\xi)e^{-\xi^2/2} \ ,$$

muestre que $y(\xi)$ satisface la ecuación diferencial de Hermite

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \ .$$

18. Un análisis del fenómeno de Gibbs produce la expresión $\boxed{\LaTeX}$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\, d\xi \ .$$

a) Expanda el integrando en una serie e integre término por término. Encuentre el valor numérico de esta expresión con cuatro cifras significativas.

b) Evalúe esta expresión por cuadratura gaussiana, entregue el programa.

Este problema vale por tres.

Fecha de entrega: 26 de Abril, antes de comenzar la prueba.