Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Métodos de la Física Matemática I

Tarea N° 2
16 de Mayo de 2008

Profesor: José Rogan
Ayudantes: Max Ramírez
Alejandro Varas

Los problemas que están marcados por $\boxed{\text{\LaTeX}}$ deben ser entregados en un pdf, generado a partir de LaTeX. Si se entrega algún ejercicio que debe ser tipeado no tipeado, se evaluará con un tercio de su nota real.

1. Establecer por inducción matemática la fórmula del binomio $\boxed{\text{\LaTeX}}$

$$(z_1 + z_2)^n = z_1^n + \frac{n}{1!} z_1^{n-1} z_2 + \frac{n(n-1)}{2!} z_1^{n-2} z_2^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} z_1^{n-k} z_2^k + \cdots + z_2^n \ ,$$

   donde z_1 y z_2 son números complejos arbitrarios, y n es un entero positivo $(n = 1, 2, \ldots)$.

2. Muestre que $\boxed{\text{\LaTeX}}$

   a) $\cos n\theta = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \cdots \ ,$
   b) $\operatorname{sen} n\theta = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \cdots \ ,$

   donde los factores $\binom{n}{m}$ son los coeficientes binomiales.

3. Consideremos la función

$$w(z) = \frac{1}{z} \ .$$

   a) ¿Cómo se mapea el círculo unitario $|w-1| = 1$ en el plano z?
   b) ¿Cómo se mapea la línea $v = 1/2$ en el plano z?

4. Para cada una de las funciones escritas, indique cómo se mapean las líneas $u =$ constante y $v =$ constante en el plano z: $\boxed{\text{\LaTeX}}$

   a) $w(z) = e^z$.
   b) $w(z) = \dfrac{z-1}{z}$.
   c) $w(z) = \log z - 1$.

5. Hállese la transformación lineal homográfica que transforma 0, i, $-i$ en 1, -1, 0. $\boxed{\text{\LaTeX}}$

6. Hállese los puntos fijos de las siguientes transformaciones lineales:

   a) $w = \dfrac{z}{2z-1}$.
   b) $w = \dfrac{2z}{3z-1}$.

c) $w = \dfrac{3z-4}{z-1}$.

d) $w = \dfrac{z}{2-z}$.

7. a) Pruebe que en forma polar las ecuaciones de Cauchy-Riemann puede ser escritas como $\boxed{\text{\LaTeX}}$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \ , \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \ .$$

b) Pruebe que la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa de una variable compleja cuando es expresada en forma polar satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \ ,$$

la cual es la ecuación de Laplace en forma polar.

8. Encuentre la función compleja analítica tal que tenga una parte real $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

9. Sea C el arco del círculo $|z| = 2$ que va de $z = 2$ a $z = 2i$ en el primer cuadrante. Sin calcular la integral, pruebe que $\boxed{\text{\LaTeX}}$

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2-1} \right| \leq \frac{\pi}{3} \ .$$

10. Suponga que $f(z)$ es analítica dentro y sobre una curva de Jordan Γ, la cual es cerrada simple y orientada positivamente. Hallar el valor de $\boxed{\text{\LaTeX}}$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{s^2+z^2}{s^2-z^2} f(s)\, ds \ .$$

Considere tres casos:

a) z y $-z$ en el exterior de Γ.

b) z en el exterior y $-z$ en el interior de Γ.

c) $-z$ en el exterior y z en el interior de Γ.

11. Considere la función compleja

$$w(z) = \frac{1}{1+z^2} \ .$$

a) Determine la expansión de Taylor en $z = 0$ e indique la región de convergencia.

b) Determine la expansión de Taylor en $z = 1+i$ e indique la región de convergencia.

12. Deducir la representación en serie de Taylor $\boxed{\text{\LaTeX}}$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \qquad (|z-i| < \sqrt{2}) \ .$$

13. Muestre que las series $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ y $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ son las continuaciones analíticas de una respecto a la otra. $\boxed{\text{\LaTeX}}$

14. Muestre que las series del ejercicio 11 son las continuaciones analíticas de una respecto a la otra.

15. a) Halle analíticamente las soluciones de la ecuación $z^3 = 1$, y demuestre que éstas constituyen los vértices de un triángulo equilátero en el plano complejo. $\boxed{\LaTeX}$

    b) Utilizando el método de Newton, encuentre las raíces de este problema numéricamente. Observe que, para distintas elecciones de las semillas, se converge a una de las tres raíces halladas en (a).

    c) Grafique en el plano complejo las "cuencas de atracción" para cada raíz, constituidas por todas las semillas que convergen a una determinada raíz. Considere las semillas en $-2 < x < 2$ e $-2 < y < 2$, y grafique las tres cuencas de atracción con distinto color. Observe la frontera entre dos cuencas. Comente.

    Este problema vale por cuatro. Recuerde entregar un informe con sus resultados y los programas en el formato que se pidió en Programación y Métodos Numéricos.

Fecha de entrega: Martes 3 de Junio, **antes** de comenzar la clase.