Capítulo 3

Cinemática en dos y tres dimensiones

Marzo 2003

En este capítulo extenderemos la descripción del movimiento de una partícula a dos y tres dimensiones. Esto nos lleva a introducir el concepto de vector, cuya definición y propiedades ilustraremos con los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración.

3.1. Vectores

Consideremos el movimiento de una partícula en un plano. La posición de la partícula podrá ser claramente especificada si se introduce un sistema de ejes perpendiculares que se intersectan en un punto, que llamaremos el "*origen*" (ver figura 3.1).

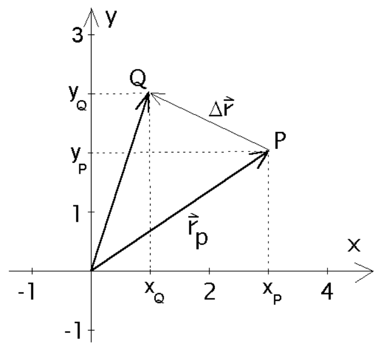

Figura 3.1

Por ejemplo, el punto P en la figura 3.1 se encuentra a 3 m a la derecha del origen, medidos a lo largo de la dirección del eje x, a 2 m sobre el origen, medidos a lo largo del eje y. En general, la posición de un punto cualquiera queda determinada dando un *par ordenado* (x, y) de números, en el sentido que *siempre* el primer número corresponderá a la proyección sobre el eje $\hat{x}$ y el segundo número a aquélla sobre el eje $\hat{y}$.

El trazo que une el origen O con el punto P, en el sentido que indica la punta de flecha en la figura 3.1, se denomina el *vector de posición* $\vec{r}_p$ del punto P. La magnitud de este vector es igual a la longitud del trazo OP y se denota por $|\vec{r}_p|$ o simplemente como r_p (sin flecha).

Rigurosamente, un vector es un objeto que, más allá de poseer las características descritas, está definido por la existencia de una operación de suma entre vectores y la multiplicación de un vector por un número (escalar), operaciones que satisfacen reglas muy precisas. Introduzcamos estas ideas a través de ejemplos.

Supongamos que la partícula en un instante t se encuentra en P y en un instante posterior $t' > t$ se encuentra en el punto Q (ver figura 3.1). El vector que une el origen O con Q es el nuevo vector de posición de la partícula. Al vector conformado por el trazo PQ y cuyo sentido va desde P hacia Q, se llama *vector desplazamiento*, $\Delta\vec{r}$ (ver figura 3.1).

Suma de Vectores

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores. Traslademos paralelamente a sí mismo al vector $\vec{B}$ hasta que su extremo romo se superponga con el extremo aguzado (punta de flecha) del vector $\vec{A}$. El vector suma $\vec{A}+\vec{B} \equiv \vec{C}$ se define como el trazo que comienza en el extremo romo de $\vec{A}$ y termina en el extremo aguzado de $\vec{B}$. Esta definición se conoce con el nombre de *regla del paralelógramo*.

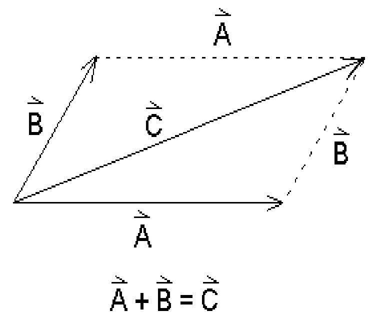

Figura 3.2

Ejemplo:
Un excursionista parte desde una cierta posición y camina 4 km hacia el Este y luego 3 km hacia el Sur. ¿Cuál es el vector desplazamiento resultante $\vec{C}$?
El vector $\vec{C}$ es la suma vectorial de los desplazamientos parciales realizados por el excursionista, hacia el este $\vec{A}$ y luego hacia el sur $\vec{B}$. Gráficamente la situación está ilustrada en la figura 3.3. La magnitud del desplazamiento resultante se calcula utilizando el teorema de Pitágoras

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ km} \quad .$$

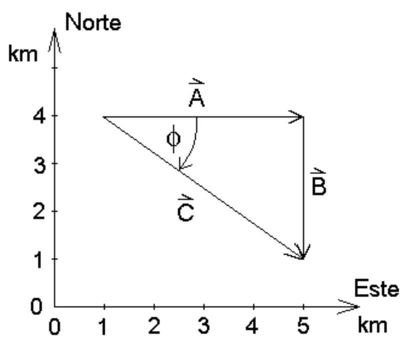

Figura 3.3

La dirección de $\vec{C}$ queda definida por el ángulo ϕ que forma el vector $\vec{C}$ con la dirección Oeste–Este. Consideraremos un ángulo positivo cuando se mide en sentido contrario a los punteros del reloj, luego

$$\tan\phi = -\frac{3}{4} = 0{,}75 \ , \quad \text{es decir,} \qquad \phi = -\ 36{,}9^\circ \ .$$

Que el ángulo ϕ sea negativo significa que está medido en el mismo sentido de los punteros del reloj.

Propiedades de la suma de vectores.

i) Conmutatividad: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$.

ii) Asociatividad: $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$.

iii) Existe un vector nulo tal que $\vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$.

iv) Para cada vector $\vec{A}$ existe un vector opuesto, que denotaremos por $-\vec{A}$, tal que $\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{0}$.

Multiplicación de un vector por un escalar real.

La multiplicación de un vector $\vec{A}$ por un número real α (escalar real) se define como un nuevo vector $\vec{B}$ de magnitud $\alpha|\vec{A}|$, cuyo sentido coincide con el de $\vec{A}$ si $\alpha > 0$ y es opuesto al de éste si $\alpha < 0$.

Propiedades de la multiplicación por un escalar real.

Sean α y β dos números reales y $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores, entonces:

i) $\alpha(\vec{A}+\vec{B})=\alpha\vec{A}+\alpha\vec{B}$.

ii) $(\alpha+\beta)\vec{A}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{A}$.

iii) $(\alpha\beta)\vec{A}=\alpha(\beta\vec{A})$.

iv) Para todo vector $\vec{A}$ se cumple que $1\ \vec{A}=\vec{A}$.

Ejercicio: Compruebe gráficamente, con algunos ejemplos concretos, que se cumplen todas las propiedades de los vectores recién señaladas.

Note que dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y que apuntan en la misma dirección. En la figura 3.4 se muestra un conjunto de vectores iguales, dibujados en diferentes posiciones del plano xy.

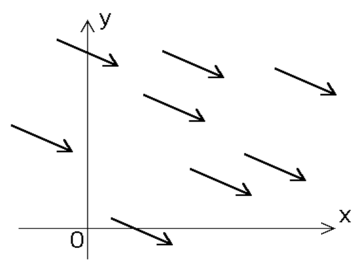

Figura 3.4

Componentes cartesianas y polares de un vector.

Consideremos nuevamente al vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ de la figura 3.1. Proyectando los extremos del vector desplazamiento sobre el eje x, se obtienen los puntos x_P y x_Q. La diferencia $x_Q - x_P$ se llama *componente cartesiana* x del vector $\Delta\vec{r}$. De la misma forma, las líneas perpendiculares al eje y, trazadas desde los extremos del vector $\Delta\vec{r}$, definen su componente cartesiana y, o sea,

$$\Delta\vec{r} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P) \ .$$

Sea $\vec{A} = (A_x, A_y)$ un vector cualquiera del plano xy, con componentes cartesianas A_x y A_y. Expresemos las componentes del vector en función de su magnitud y del ángulo θ que forma con el semieje x positivo. La figura 3.5 muestra que

$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\sin\theta \ ,$$

donde

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{(A_x^2 + A_y^2)} \quad \text{y} \quad \tan\phi = \frac{A_y}{A_x} \ .$$

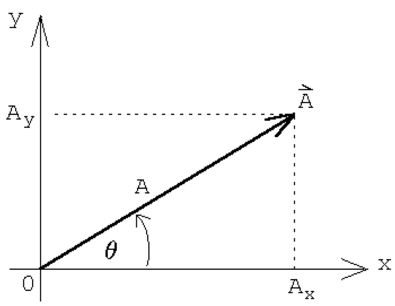

Figura 3.5

De esta manera, un vector en un plano queda determinado si se conocen sus componentes cartesianas, o si se conoce su magnitud A y el ángulo que forma con el semieje x positivo (referidos a un sistema de coordenadas dado). Los números (A, ϕ) reciben el nombre de *coordenadas polares* del vector $\vec{A}$.

Vectores Unitarios.

Al dividir un vector $\vec{A}$ por su magnitud se obtiene un nuevo vector $\hat{a}$, de módulo uno, cuya dirección y sentido coinciden con aquellos del vector $\vec{A}$. En efecto,

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \left(\frac{A_x}{A}, \frac{A_y}{A}\right)$$

$$|\hat{a}| = \sqrt{(A_x/A)^2 + (A_y/A)^2} = \sqrt{\frac{A_x^2 + A_y^2}{A^2}} = 1 \ .$$

A cada vector se le puede asociar un vector unitario. Existen, sin embargo, tres vectores unitarios que merecen mención especial. Estos son los vectores unitarios $\hat{x}, \hat{y}$ y $\hat{z}$ que apuntan en sentido positivo sobre cada uno de los ejes coordenados de un sistema cartesiano en tres dimensiones.

La figura 3.6 muestra la descomposición de un vector arbitrario $\vec{A}$ en la suma de tres vectores: un vector $A_x\hat{x}$, paralelo al eje x, otro $A_y\hat{y}$ paralelo al eje y y un tercero $A_z\hat{z}$ paralelo al eje z. Es decir,

$$\vec{A} = A_x\ \hat{x} + A_y\ \hat{y} + A_z\ \hat{z}\ \ .$$

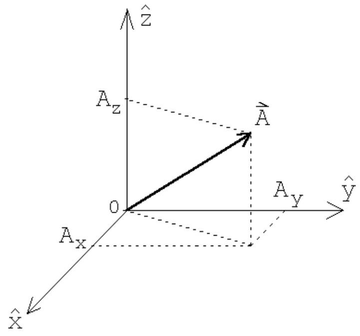

Figura 3.6

Producto escalar o producto punto de dos vectores

Sean

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

y

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

dos vectores arbitrarios. Se define el *producto punto* entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ mediante la expresión

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv |\vec{A}|\,|\vec{B}|\ \cos\gamma\ ,$$

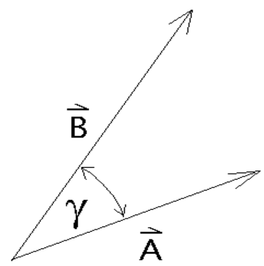

Figura 3.7

donde γ es el ángulo entre los dos vectores (ver figura 3.7).

De la definición se desprende que el producto punto de dos vectores es un número real. Además, y esto es muy importante, es independiente de la orientación del sistema de coordenadas. Usando la definición de producto punto es inmediato que

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$$

y

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{x}\cdot\hat{z} = \hat{y}\cdot\hat{z} = 0\ .$$

Otras características importantes del producto punto son su conmutatividad

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

y distributividad

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}\quad .$$

Evaluemos el producto punto entre los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus coordenadas. Se tiene

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\cdot(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}) \\
&= A_xB_x\,\hat{x}\cdot\hat{x}+A_xB_y\,\hat{x}\cdot\hat{y}+A_xB_z\,\hat{x}\cdot\hat{z}+A_yB_x\,\hat{y}\cdot\hat{x}+A_yB_y\,\hat{y}\cdot\hat{y}+ \\
&\quad +A_yB_z\,\hat{y}\cdot\hat{z}+A_zB_x\,\hat{z}\cdot\hat{x}+A_zB_y\,\hat{z}\cdot\hat{y}+A_zB_z\,\hat{z}\cdot\hat{z} \\
&= A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\ .
\end{aligned}$$

Resumen: El módulo de un vector y la suma y producto punto de dos vectores vienen dados por

$$|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x,A_y+B_y,A_z+B_z)=(A_x+B_x)\,\hat{x}+(A_y+B_y)\,\hat{y}+(A_z+B_z)\,\hat{z}$$

y

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\ \cos\gamma=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\ .$$

Note que la última expresión permite evaluar el ángulo entre dos vectores si se conocen sus componentes cartesianas.

Ejemplo

Evaluemos nuevamente el ángulo entre dos diagonales de un cubo.

Sea $\vec{A}$ el vector a lo largo de la diagonal que une el punto (0,0,0) con el punto (1,1,1) y $\vec{B}$ el vector a lo largo de la diagonal que une el punto (1,0,0) con el punto (0,1,1). Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, por lo tanto, pueden escribirse en coordenadas cartesianas de la forma

$$\vec{A}=\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}\qquad \text{y}\qquad \vec{B}=-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}\ .$$

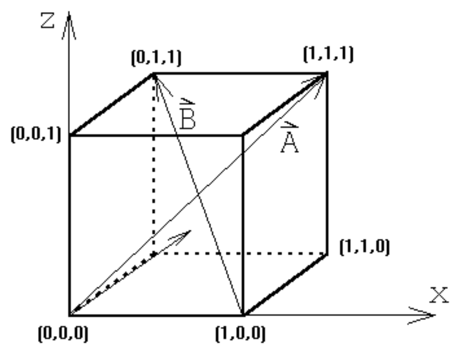

Figura 3.8

Evaluemos el producto punto de estos dos vectores. Se tiene

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\,|\vec{B}|\ \cos\gamma=\sqrt{3}\,\sqrt{3}\ \cos\gamma\ \ ,$$

donde γ es el ángulo entre los dos vectores (o sea, el ángulo entre las dos diagonales). Por otra parte, usando coordenadas cartesianas

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=1\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot 1=1\ .$$

De las dos ecuaciones anteriores se deduce que $\cos\gamma=1/3$, o sea, $\gamma=70{,}53°$.

3.2. Cinemática

La generalización de los conceptos de la cinemática de una a dos y tres dimensiones es directa.

Supongamos que $\vec{r}\,(t)$ representa la posición de cierta partícula. Entonces su velocidad y aceleración (instantánea) vendrán dadas por

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}\,(t) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta) - \vec{r}(t)}{\Delta}$$

y

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}\,(t) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta) - \vec{v}(t)}{\Delta} .$$

De la expresión anterior se deduce que si

$$\vec{r}\,(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} \ ,$$

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son las componentes del vector de posición, entonces

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z} \ ,$$

o sea, para encontrar la velocidad se puede derivar cada componente del vector posición por separado.

Introduzcamos también el concepto de *velocidad relativa*. Supongamos que una partícula A se mueve con velocidad $\vec{v}_A$ y otra partícula B con velocidad $\vec{v}_B$, entonces la velocidad con que A observa que se mueve B, viene dada por

$$\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \ .$$

Se dice que "$\vec{v}$ es la velocidad relativa de B respecto a A".

Ejemplo:

Suponga que la corriente de un canal tiene una velocidad de 10 km/h en dirección Este. Un transbordador navega en la dirección de 30° Noroeste, a una velocidad de 20 km/hora con respecto a la corriente del canal (ver figura 3.9). ¿Cuál es la velocidad y dirección del transbordador según un observador situado en la ribera?

Para resolver el problema introduciremos un sistema de coordenadas $\hat{x}, \hat{y}$ cuyo origen O' se mueve junto al agua del canal. Para el observador O', un punto fijo en la orilla se mueve con velocidad

$$\vec{v}_A = [-10, 0] \ \ \text{km/h}$$

mientras que el transbordador se aleja con una velocidad

$$\vec{v}_t = [-20\sin(30°), 20\cos(30°)] \ \text{km/h} = [-10, 10\sqrt{3}] \ \text{km/h} \ .$$

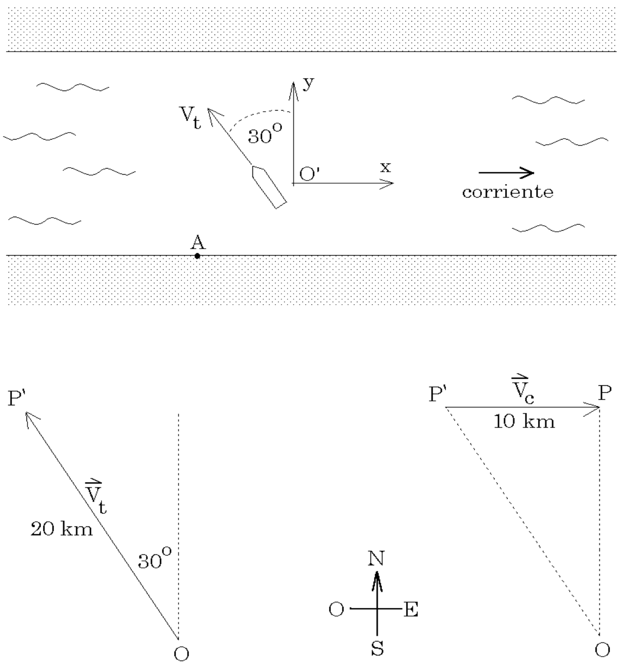

Figura 3.10

Luego, la velocidad con que el observador parado en la orilla en el punto A ve alejarse al transbordador (o sea, la velocidad relativa entre el transbordador y la orilla), será

$$\vec{v} = \vec{v}_t - \vec{v}_A = [0, 10\sqrt{3}] \ \ \mathrm{km/h} = 10\sqrt{3}\,\hat{y} \ \ \mathrm{km/h}\ .$$

Analicemos ahora el problema de otra forma. Supongamos que nos damos un intervalo de tiempo arbitrario, por ejemplo, 1 hora (porque es el más fácil de usar en este caso) e imaginemos que durante ese intervalo la corriente del canal está detenida. Calculamos el desplazamiento del transbordador en este caso. En una hora el ferry se desplaza 20 km desde O hasta el punto P'. En seguida – y siempre en nuestra imaginación – dejemos fluir la corriente del canal durante una hora, pero ahora con el ferry detenido (dejando que simplemente flote en la corriente). El desplazamiento debido al arrastre del canal llevará al ferry desde el punto P' hasta P (10 km hacia la derecha), como mostramos en la figura 3.10.

El desplazamiento total del ferry es el vector de O hasta P. Este desplazamiento, como es fácil de demostrar, coincide con el que el ferry hubiese tenido en una hora si los dos movimientos hubiesen estado presentes simultáneamente. Es decir, para resolver el problema podemos descomponer el movimiento en dos movimientos separados, congelando uno y otro sucesivamente. El movimiento total es la *superposición* de ambos movimientos. Esta operación, sólo posible en la imaginación, arroja los mismos resultados que se observan en la vida real.

Demos otro ejemplo del uso del principio de superposición. Consideremos un anillo que rueda (sin resbalar) por una superficie horizontal con velocidad constante. Tomemos un punto cualquiera sobre el anillo y analicemos su movimiento. Para un observador O en reposo respecto a la superficie, el movimiento del punto tendrá un aspecto complicado. Sin embargo, al trasladarnos uniformemente con la misma velocidad que el centro del anillo, el movimiento del punto se tornará muy simple: es un movimiento circular uniforme. Así, el movimiento complicado que observa O se puede descomponer en dos movimientos simples, un movimiento de traslación uniforme superpuesto a un movimiento circular uniforme (ver problema 13 de la sección 3.3).

Caída libre

Galileo fue el primero en considerar la caída de una partícula como una superposición de dos movimientos.

La figura 3.11, a la izquierda, muestra la posición de una pelota en caída libre durante varios instantes equiespaciados. A la derecha se muestra la situación que se observa si el cuerpo además inicialmente tiene una velocidad horizontal. La trayectoria en este caso es una parábola. Antes de Galileo, los filósofos se esforzaron mucho para intentar explicar este movimiento. Galileo centró su interés buscando la descripción más sencilla y directa. De hecho, lo analizó como una superposición de dos movimientos: i) la tendencia natural de los cuerpos a mantener su velocidad (ley de inercia) y ii) la caída libre de un cuerpo debida a la atracción gravitatoria. Ambos movimientos se superponen simultáneamente y dan origen al movimiento parabólico.

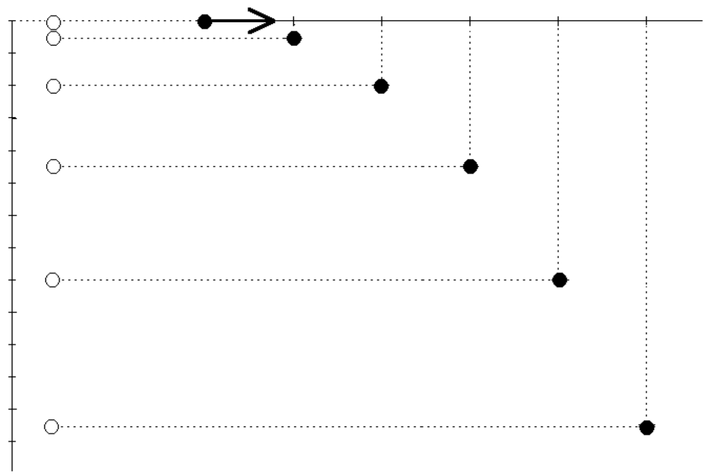

Figura 3.11

Una vez aceptado que el movimiento de una partícula en un campo gravitatorio uniforme se puede describir como una superposición de dos desplazamientos que ocurren simultáneamente, continuamos con la descripción de este movimiento.

Para comenzar, especifiquemos el sistema de referencia. El eje $\hat{x}$ lo elejimos de manera que su dirección coincida con la proyección de la velocidad sobre el plano horizontal, mientras que el eje $\hat{z}$ lo elegimos hacia arriba (o sea, una partícula al caer acelera en la dirección $-\hat{z}$). De acuerdo a nuestra hipótesis, la aceleración en todo instante es $\vec{a}(t) = -g\hat{z}$. También supondremos que la velocidad en el instante $t = 0$ viene dada por $\vec{v}(0) = v_x^{(0)}\hat{x} + v_z^{(0)}\hat{z}$ y que la partícula se encuentra en el lugar $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = x_0\hat{x} + z_0\hat{z}$. Analicemos cada una de las componentes por separado.

Componente x : La aceleración no tiene componente en la dirección x, o sea,

$$a_x = 0 \ \ .$$

La velocidad v_x es, por lo tanto, constante, igual al valor inicial:

$$v_x(t) = v_x^{(0)} \ \ \forall t \ \ .$$

Para el desplazamiento en la dirección x se encuentra que

$$x(t) = x(0) + v_x^{(0)}\, t \ \ .$$

Componente z : La aceleración es

$$a_z = -g \ .$$

La velocidad v_z y el desplazamiento en la dirección z vendrán dados por

$$v_z(t) = v_z^{(0)} - gt$$

y

$$z(t) = z(0) + v_z^{(0)}\, t - \frac{1}{2}gt^2 \ .$$

Estos resultados los podemos condensar escribiéndolos en forma vectorial:

$$\vec{a}(t) = -g\hat{z}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}^{\,(0)} - gt\hat{z}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}^{\,(0)}\, t - \frac{1}{2}gt^2\hat{z} \ .$$

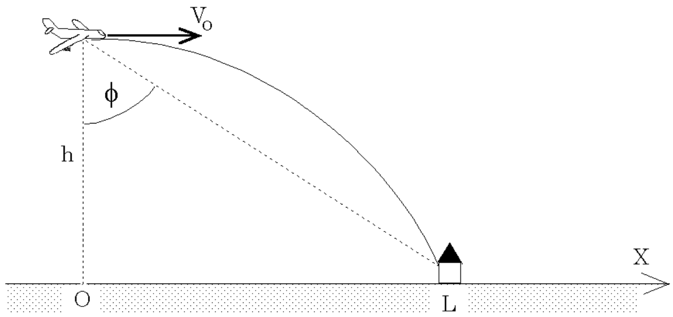

Figura 3.12

Ejemplo

Un bombardero vuela con una velocidad horizontal v_0, constante, y a una altura h en una trayectoria que pasa directamente por sobre su objetivo. ¿A qué ángulo de visión ϕ debe soltar la bomba, de forma que ésta llegue a su objetivo? (Ignore el efecto debido al roce del aire.)

La bomba en el instante en que se deja libre tiene la misma velocidad que el bombardero. Definimos el sistema de coordenadas de acuerdo a lo que se observa en la figura 3.12. Entonces la posición y la velocidad inicial de la bomba vienen dadas por $\vec{r}_0 = h\hat{z}$ y $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$, respectivamente. ¿Cuánto demora la bomba en caer? La bomba llegará al suelo cuando $z(t) = h - gt^2/2 = 0$. Esto ocurre en el instante $\tau = \sqrt{(2h/g)}$. Durante el intervalo de tiempo τ la bomba alcanza a recorrer una distancia horizontal $L = v_0\,\tau$. Luego para el ángulo de visión obtenemos

$$\tan\phi = \frac{L}{h} = \frac{v_0}{h}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2v_0^2}{gh}}\ .$$

Movimiento circular uniforme

Consideremos una partícula que gira con rapidez constante sobre una trayectoria circular de radio R (que define el plano x–y). Eligiendo el origen al centro del círculo, el ángulo del vector posición con el eje $\hat{x}$ aumentará uniformemente:

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t\ \ ,$$

donde ϕ_0 es el ángulo en el instante $t = 0$ y ω_0 es una constante que determina cuán rápido varía el ángulo (por esta razón se le suele llamar *velocidad angular*). Las componentes x e y del vector posición vienen dadas por

$$x(t) = R\cos\phi(t) = R\cos(\phi_0 + \omega_0 t)$$

e

$$y(t) = R\sin\phi(t) = R\sin(\phi_0 + \omega_0 t).$$

El vector posición es, por lo tanto,

$$\vec{r}(t) = R\cos(\phi_0+\omega_0 t)\hat{x}+R\sin(\phi_0+\omega_0 t)\hat{y}\ .$$

Derivando $\vec{r}(t)$ se encuentra la velocidad

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) = & - R\omega_0\,\sin(\phi_0+\omega_0 t)\hat{x}\\ & + R\omega_0\,\cos(\phi_0+\omega_0 t)\hat{y}\ .\end{aligned}$$

Evaluemos el módulo de la velocidad (rapidez):

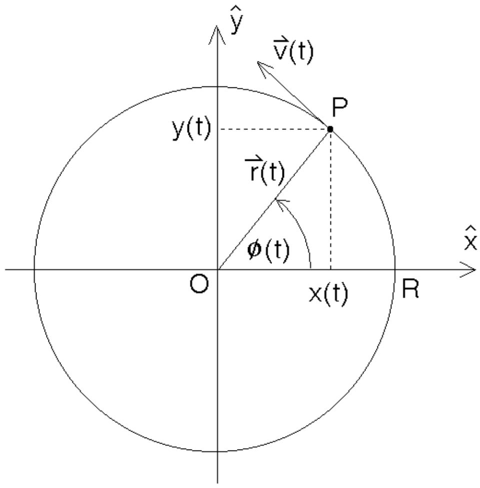

Figura 3.13

$$\begin{aligned} v &= |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2+v_y(t)^2}\\ &= \sqrt{R^2\omega_0^2\sin^2(\phi_0+\omega_0 t)+R^2\omega_0^2\cos^2(\phi_0+\omega_0 t)} = R\omega_0\ .\end{aligned}$$

A pesar de que la rapidez es constante (no depende del tiempo), la velocidad no lo es, ya que continuamente cambia de sentido. Esta última ecuación enseña que la velocidad angular es la rapidez de la partícula dividida por el radio de giro.

Evaluando el producto punto entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = x(t)v_x(t)+y(t)v_y(t) = 0$$

se encuentra que éste es nulo. Como el producto punto de dos vectores no nulos vale cero sólo si los dos vectores son perpendiculares, se halla que la velocidad de una partícula en un movimiento circular uniforme es siempre perpendicular al radio.

Derivando la velocidad se encuentra la aceleración:

$$\vec{a}(t) = -R\omega_0^2\,\cos(\phi_0+\omega_0 t)\hat{x} - R\omega_0^2\,\sin(\phi_0+\omega_0 t)\hat{y}\ .$$

Note que en todo instante

$$\vec{a}(t) = -\omega_0^2\,\vec{r}(t)\ ,$$

o sea, la aceleración siempre apunta hacia el origen (razón por la cual se llama *aceleración centrípeta*). La magnitud de la aceleración siempre es constante y vale

$$a = |\vec{a}(t)| = R\omega_0^2\ .$$

3.3. * Coordenadas polares

Los vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$.

Hemos visto que el movimiento de un punto P en el plano x, y se puede especificar usando dos funciones que describan sus coordenadas cartesianas del punto, o sea,

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} \ .$$

También podemos especificar el movimiento P usando coordenadas polares, es decir, dando las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$. Al usar coordenadas polares para describir el movimiento de un punto P, resulta sumamente conveniente introducir los vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ definidos por

$$\hat{r} = \cos\theta\ \hat{x} + \sin\theta\ \hat{y}$$

y

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\ \hat{x} + \cos\theta\ \hat{u} \ .$$

Observe que estos vectores unitarios generalmente (cuando $\theta = \theta(t)$ depende del tiempo) son tiempo dependientes. El vector $\hat{r}$ apunta en la dirección radial, mientras que el vector $\hat{\theta}$ es tangencial al círculo que pasa por P y tiene su centro en el origen.

Ejercicio: Demuestre que los vectores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ efectivamente son unitarios. Tambien demuestre que son *ortonormales*, es decir, $\hat{r} \perp \hat{\theta}$.

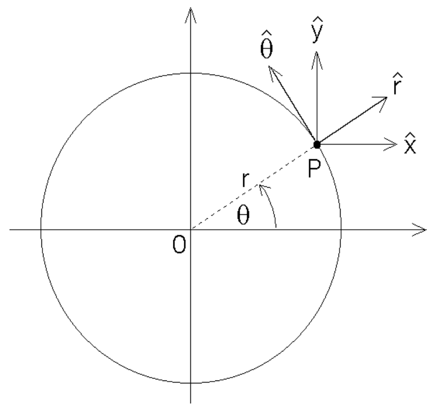

Figura 3.14

Encontremos la derivada temporal de estos vectores unitarios, es decir, analicemos como varían a medida que transcurre el tiempo. Se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\hat{r}} &= \frac{d}{dt}\left[\,\cos\theta\ \hat{x} + \sin\theta\ \hat{y}\,\right] \\
&= \frac{d\cos\theta(t)}{dt}\ \hat{x} + \frac{d\sin\theta(t)}{dt}\ \hat{y} \\
&= -\sin(\theta(t))\ \dot{\theta}(t)\ \hat{x} + \cos(\theta(t))\ \dot{\theta}(t)\ \hat{y} \\
&= \dot{\theta}(t)\ \left[\,-\sin(\theta(t))\ \hat{x} + \cos(\theta(t))\ \hat{y}\,\right] = \dot{\theta}\ \hat{\theta}
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \dot{\hat{\theta}} &= \frac{d}{dt}\left[\, -\sin\theta\ \hat{x} + \cos\theta\ \hat{y}\,\right] \\
&= -\frac{d\sin\theta(t)}{dt}\ \hat{x} + \frac{d\cos\theta(t)}{dt}\ \hat{y} \\
&= -\cos(\theta(t))\ \dot{\theta}(t)\ \hat{x} - \sin(\theta(t))\ \dot{\theta}(t)\ \hat{y} \\
&= -\dot{\theta}(t)\ \left[\,\cos(\theta(t))\ \hat{x} + \sin(\theta(t))\ \hat{y}\,\right] = -\dot{\theta}\ \hat{r}
\end{aligned}
$$

Resumen:

$$
\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\ \hat{\theta} \tag{3.1}
$$

$$
\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\ \hat{r}\ . \tag{3.2}
$$

Movimiento circular (en coordenadas polares).

Consideremos un punto P que se mueve entorno al origen sobre un círculo de radio R y sea $\theta(t)$ el ángulo polar (medido respecto al eje $\hat{x}$ y en el sentido contrario al avance del reloj). El vector posición del punto P es:

$$
\vec{r}(t) = R\ \hat{r}(t)
$$

Derivando esta relación (sólo $\hat{r}$ depende de t) encontramos la velocidad:

$$
\dot{\vec{r}}(t) = R\ \dot{\hat{r}} = R\ \dot{\theta}\ \hat{\theta}\ .
$$

Tal como se esperaba, la dirección de la velocidad es tangencial al círculo con centro en O que pasa por P. La rapidez es $|\vec{v}| = R\ \dot{\theta}$.

$\theta(t)$ es un ángulo, por esa razón a $\dot{\theta}$ se le llama *velocidad angular*. Si el movimiento circular es uniforme (siempre con la misma rapidez) entonces $\theta(t) = \omega_0\ t$. Para el movimiento circular uniforme la velocidad angular es simplemente $\dot{\theta}(t) = \omega_0$.

Determinemos ahora la aceleración para el movimiento circular. Derivando el vector velocidad se encuentra

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{v}}(t) &= R\ \frac{d}{dt}\ \left(\ \dot{\theta}\ \hat{\theta}\ \right) \\
&= R\ \left(\ \ddot{\theta}\ \hat{\theta} + \dot{\theta}\ \dot{\hat{\theta}}\right) \\
&= R\ddot{\theta}\ \hat{\theta} - R\dot{\theta}^2\ \hat{r}
\end{aligned}
$$

El primer término nos da la *aceleración tangencial* mientras que el segundo es la *aceleración radial*. Para el movimiento circular uniforme (es decir, si $\theta(t) = \omega_0\, t$) se obtiene

$$
\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = -R\omega_0^2\ \hat{r}\ ,
$$

o sea, el mismo resultado encontrado en la sección anterior.

3.4. Problemas

1. Sean $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ los vectores $\vec{A} = 2\hat{x} + \hat{y}$, $\vec{B} = 3\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}$ y $\vec{C} = \hat{x} + 3\hat{y} - \hat{z}$.

   a) Encuentre el módulo de $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

   b) Encuentre el módulo del vector suma, o sea, evalúe
   $$D = |\vec{D}| = |\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| \ .$$

   c) ¿Cuál vector es más largo: $\vec{A} + \vec{B}$ o $\vec{A} + \vec{C}$? En vista de lo calculado en la parte a), ¿le sorprende este resultado?

   d) Encuentre el ángulo entre los vectores $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

   Respuesta: d) 49,86^0.

2. Demuestre que los vectores:
   $$\vec{A} = \cos(\alpha)\hat{x} + \sin(\alpha)\hat{y}$$
   $$\vec{B} = \cos(\beta)\hat{x} + \sin(\beta)\hat{y}$$
   son vectores unitarios que forman un ángulo α y β con el eje $\hat{x}$, respectivamente. Evalúe $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y encuentre una fórmula para $\cos(\alpha - \beta)$.

3. Considere los tres puntos cuyas coordenadas cartesianas vienen dadas por: $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (1,2,0)$ y $P_3 = (2,3,1)$. Demuestre que ellos definen los vértices de un triángulo rectángulo.

4. Encuentre un vector unitario $\hat{A}$ que sea simultáneamente perpendicular a los vectores $\vec{u} = 2\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}$ y $\vec{v} = \hat{x} - \hat{y} + \hat{z}$. ¿Cuántos vectores unitarios $\hat{A}$ existen con esta propiedad?

5. Definamos los vectores:
   $$\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})$$
   $$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{x} + \hat{y})$$

   a) Grafique $\vec{s}$ y $\vec{t}$.

   b) Evalúe $s = |\vec{s}|$ y $t = |\vec{t}\,|$.

   c) Encuentre el ángulo entre $\vec{s}$ y $\vec{t}$.
   Comentario: Note que $\vec{s}$ y $\vec{t}$ pueden considerarse como un nuevo conjunto de ejes de referencia $(\hat{s}, \hat{t}\,)$. Para indicar que $\vec{s}$ y $\vec{t}$ son vectores unitarios se ha usado la convención de reemplazar las flechas por tongos.

d) Considere los vectores $\vec{A} = \hat{x} + 2\hat{y}$ y $\vec{B} = 2\hat{x} - 3\hat{y}$. Exprese estos vectores en términos de los nuevos vectores unitarios, es decir, escriba $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la forma

$$\vec{A} = a_s\hat{s} + a_t\hat{t}$$
$$\vec{B} = b_s\hat{s} + b_t\hat{t}$$

y evalúe las constantes a_s, a_t, b_s y b_t.

e) Evalúe $\vec{A}\cdot\vec{B}$ de dos maneras distintas: primero usando las componentes respecto al sistema de referencia $(\hat{x}, \hat{y})$ y luego usando las componentes respecto al sistema de referencia $(\hat{s}, \hat{t}\,)$.

6. Sea $\vec{A} = \hat{x} + 3\hat{z} - 2\hat{y}$. Encuentre un vector $\vec{B}$ en el plano $\hat{x}, \hat{y}$ que sea perpendicular a $\vec{A}$.

   Respuesta: $\vec{B} = \alpha\ (2\hat{x} + \hat{y})$, donde α es un número real no nulo.

7. Considere la siguiente situación en nuestro espacio físico de tres dimensiones: Desde cierto origen emergen cuatro vectores de igual tamaño, de manera que los ángulos entre cualquier par de vectores sean iguales. Encuentre el valor de ese ángulo. (Para resolver este problema relaciónelo con el de las diagonales de un cubo considerado en la sección 3.1.)

   Comentario: Las "puntas" de los cuatro vectores forman los vértices de un tetraedro regular. La molécula de metano CH_4 es un ejemplo de lo arriba planteado. En tal molécula el átomo de carbono se encuentra al centro de los cuatro átomos de hidrógeno que están distribuidos de la manera más regular posible.

8. Encuentre el ángulo entre dos vectores de 8 y 10 unidades de largo, si el vector suma forma un ángulo de 50° con el mayor de ellos. Encuentre también la magnitud del vector suma.

9. La suma de dos vectores mide 30 unidades y forma ángulos de 25° y 50° con ellos. ¿Cuál es la magnitud de cada uno de los vectores?

10. Suponga que la posición $\vec{r}$ de una partícula en función del tiempo t viene dada por:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = r_0 \left(\cos\left(\frac{t}{t_0}\right)\hat{x} + \sin\left(\frac{t}{t_0}\right)\hat{y}\right),$$

   con $t_0 = 1$ min y $r_0 = 3$ cm. ¿Qué trayectoria recorre la partícula? ¿Cuánto tiempo tarda la partícula en volver al punto de partida?

11. Supongamos que la posición $\vec{r}$ de una partícula en función del tiempo t viene dada por
$$\vec{r} = at\,\hat{x} + (b - ct^2)\,\hat{y} \ ,$$
con $a = 2$ m/s, $b = 10$ m y $c = 9{,}8$ m/s^2. Grafique la trayectoria. ¿Qué tipo de trayectoria es? ¿En qué instante la partícula cruza el eje $\hat{x}$?

12. Un barco a vapor se dirige hacia el sur con una velocidad $\vec{v_b} = 25$ km/h en un área donde sopla un viento desde el suroeste con velocidad $\vec{v_0} = 18$ km/h. Encuentre el ángulo θ_0 que forma el humo emitido por el vapor con la dirección norte–sur (ver figura 3.15).
Respuesta: $\theta_0 \simeq 18,64^o$

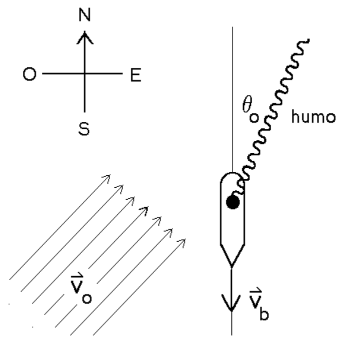

Figura 3.15

13. Considere un disco de radio $R = 50$ cm que rueda sobre una recta (el eje $\hat{x}$) con una velocidad angular $\omega = 2$ s^{-1}. Considere un punto P ubicado en el perímetro del disco, y designe por $\vec{r}$ al vector que va desde el origen hacia el punto P. Encuentre una expresión para $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$; suponga que en el instante $t = 0$ el punto P está en el origen.

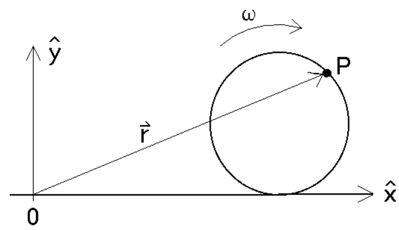

Figura 3.16

Haga un gráfico de $\vec{r}\,(t)$ para el intervalo $t \in [0\,\text{s}\ ,10\,\text{s}\,]$. ¿Cuánto tarda la rueda en dar una vuelta completa?

14. Una partícula recorre una trayectoria circular en el plano x–y, cuyo radio es $R = 5$ m con una velocidad constante $v_0 = 15$ m/s y en el sentido del reloj. Encuentre el vector posición $\vec{r}(t)$, el vector velocidad $\vec{v}(t)$ y el vector aceleración $\vec{a}(t)$ (en coordenadas cartesianas) si en el instante $t = 0$ la partícula se encuentra en $\vec{r_0} = -5\hat{y}$.

15. Considere un disco de radio R en el plano x–y. Sea θ el ángulo de un punto ubicado en el borde del disco respecto al eje $\hat{x}$. Suponga que el disco gira con una *aceleración angular* constante α_0 (es decir, $\ddot{\theta}(t) = \alpha_0$). Encuentre la velocidad y aceleración de P en función del tiempo. Suponga que en el instante $t = 0$ el punto P se encontraba en reposo sobre el eje $\hat{x}$.

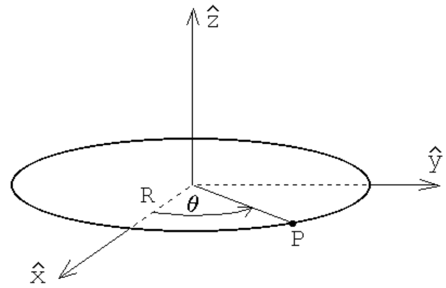

Figura 3.17

16. Estime (en m/s y km/h) la velocidad máxima con la que usted puede lanzar una piedra.

17. Una pelota sale rodando del descanso de una escalera con velocidad horizontal $v_0 = 1{,}52$ m/s. Los escalones son de 20 cm de alto y 20 cm de ancho. ¿Cuál será el primer escalón al que llegue la pelota? Dibuje una figura para ilustrar el problema.

18. Un cañón se encuentra a una distancia D de un edificio. Encuentre el ángulo de elevación θ_0 y la velocidad v_0 de la bala de manera que el proyectil entre horizontalmente por la ventana que se encuentra a una altura h (ver figura 3.18).

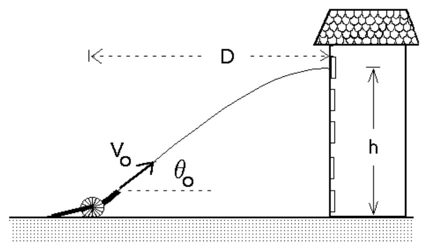

Figura 3.18

19. Considere un río de ancho L en el cual el agua fluye con velocidad v_0. Un nadador recorre el trayecto $A \longrightarrow B \longrightarrow A$, mientras que un segundo nada el trayecto $C \longrightarrow D \longrightarrow C$ (ver figura 3.19). Los puntos C y D están anclados fijamente al fondo del río y la separación entre C y D es la misma que entre A y B. Si ambos nadan con la misma velocidad v respecto al agua, ¿quién ganará la carrera?

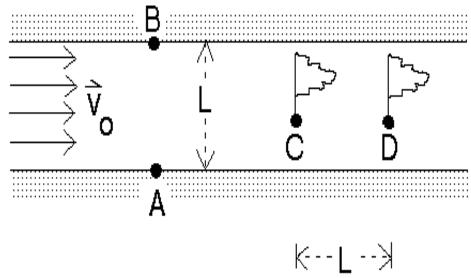

Figura 3.19

20. Un pato vuela horizontalmente en línea recta con velocidad v_p a una altura h. Un niño con una honda, que puede disparar piedras con una velocidad v_0, hace uso de su arma en el instante que el pato lo sobrevuela.

    a) ¿Cuál es el ángulo respecto a la normal con el cual debe disparar la piedra?

    b) ¿Qué distancia d alcanza a recorrer el pato antes de ser alcanzado por el proyectil?

    (c) ¿Cuál es la velocidad mínima que debe tener el proyectil para que éste llegue al pato?

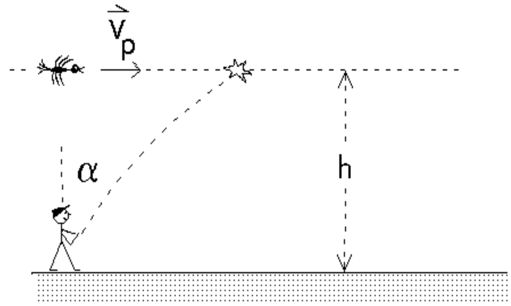

Figura 3.20

21. Se lanza un proyectil con cierto ángulo de elevación θ_0. El alcance del proyectil es R (ver figura 3.21). Si se desprecia el roce con el aire, demuestre que la trayectoria viene dada por la ecuación

$$y(x) = -\left(\frac{\tan\theta_0}{R}\right) x^2 + x\,\tan\theta_0 \quad .$$

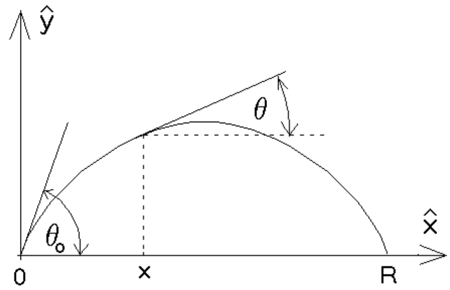

Figura 3.21

Note que esta ecuación corresponde a una parábola. Demuestre también que el ángulo de la tangente en el punto x viene implícitamente dado por

$$\tan\theta = \left[1 - \frac{2x}{R}\right] \tan\theta_0 \quad .$$

22. Grafique en papel polar la trayectoria de una partícula si su posición en coordenadas polares, en función del tiempo, viene dada por:

    a) $\begin{cases} r(t) = r_0 \\ \theta(t) = t/t_0 \end{cases}$

    con $r_0 = 1$ [m] y $t_0 = 2\pi$ [s].

    b) $\begin{cases} r(t) = At \\ \theta(t) = t/t_0 \end{cases}$

    con $A = 1/(4\pi)$ [m/s] y $t_0 = 2\pi$ [s].

$c)$ $$\begin{cases} r(t) = r_0 + B\cos(t/2t_0) \\ \theta(t) = t/t_0 \end{cases}$$

con $r_0 = 1$ [m], $t_0 = 2\pi$ [s] y $B = 0{,}5$ [m].

23. Una partícula se encuentra en el instante $t = 0$ en el lugar $\vec{r}(0) = 10\hat{y}$ cm y tiene una velocidad $\vec{v}(0) = 2\hat{x}$ cm/s. La aceleración en todo instante es

$$\vec{a} = -G\frac{\vec{r}}{r^3} \ ,$$

con G=200 cm/s^2. Encuentre numéricamente la trayectoria de la partícula para $t \in [0, 3{,}5\,\text{s}]$. ¡Grafique!

Indicación: programe las siguientes relaciones

$$\vec{r}(t+\Delta) \simeq \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\,\Delta$$

$$\vec{v}(t+\Delta) \simeq \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\,\Delta$$

$$\vec{a}(t+\Delta) = -G\vec{r}(t+\Delta)/r^3(t+\Delta)\,.$$

24. Calcule la máxima distancia Δ que un objeto puede alejarse del borde de un "peldaño" para evitar ser alcanzado por los objetos lanzados con velocidad v_0 desde el punto A. La distancia desde A al borde del peldaño es L y la altura de éste es H.

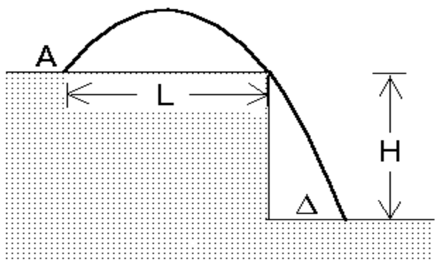

Figura 3.22

25. Un proyectil se lanza con velocidad inicial v_0 y ángulo de lanzamiento θ, ambos conocidos. El proyectil sobrepasa una barrera rectangular de ancho a conocido, pero altura h desconocida, rozando sus dos vértices A y B (ver figura 3.23). Encuentre la distancia d que separa el punto de lanzamiento con la pared más cercana al obstáculo. También encuentre la altura h de la barrera.

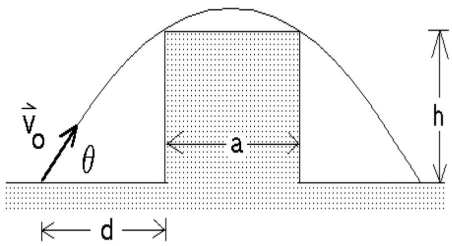

Figura 3.23

26. Una partícula tiene un vector posición dado por $\vec{r} = 30 \cdot t\ \hat{x} + (40 \cdot t - 5\,t^2)\hat{y}$, donde r está en metros y t en segundos. Encuentre los vectores velocidad y aceleración instantáneas.

27. Desde una distancia d del borde recto de un tobogán se dispara una bengala. Si el tobogán tiene una altura h y un largo b, determinar ambas componentes de la velocidad inicial del proyectil para que éste aterrice sobre el vértice superior del tobogán de manera que su velocidad sea paralela al plano inclinado.

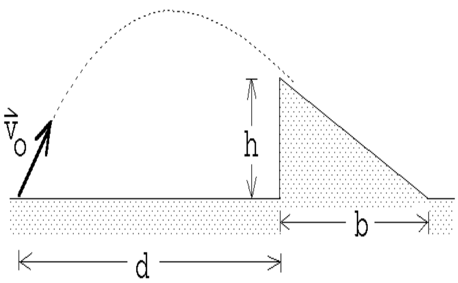

Figura 3.24

Respuesta:

$$\vec{v} = d\sqrt{\frac{g\,b}{2\,h\,(b+d)}}\,\hat{x} + (2\,b+d)\sqrt{\frac{h\,g}{2\,b\,(b+d)}}\,\hat{z}\ .$$

28. Supongamos que $r(t)$ y $\theta(t)$ son las coordenadas polares de un punto que se mueve en un plano. Demuestre que la velocidad de tal punto, en coordenadas cartesianas, viene dada por

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \left[\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\,\frac{d\theta}{dt}\,\sin\theta\right]\hat{x} + \left[\frac{dr}{dt}\,\sin\theta + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\cos\theta\right]\hat{y}\\ &= \left[\dot{r}\,\cos\theta - r\,\dot{\theta}\,\sin\theta\right]\,\hat{x} + \left[\dot{r}\,\sin\theta + r\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right]\,\hat{y}\ .\end{aligned}$$

Encuentre la velocidad en coordenadas cartesianas para los tres casos del problema 22.

29. Una partícula tiene aceleración constante

$$\vec{a} = (6 \cdot \hat{x} + 4 \cdot \hat{y})[\mathrm{m/s^2}]\ .$$

En $t = 0$ la velocidad es cero y el vector posición es $\vec{x}_0 = 10 \cdot \hat{x}$ [m].

a) Encuentre los vectores velocidad y posición en un instante t cualquiera.

b) Encuentre la ecuación de la trayectoria en el plano y dibújela.

30. De un cañón se disparan dos proyectiles: el primero con un ángulo de elevación $\theta_1 = 60°$ y el segundo con un ángulo de elevación $\theta_2 = 45°$. La velocidad de los proyectiles, al emerger del cañón es $v_0 = 250$ m/s. Despreciando la resistencia del aire, encuentre el intervalo de tiempo entre los dos disparos que asegure que los proyectiles choquen.

31. La figura indica la conexión en una caja de cambios de un automóvil. Encuentre la razón entre los radios de ambos engranajes, que es la misma para ambos pares, si uno desea que en la primera marcha, con el motor a 2000 RPM, el auto tenga una velocidad de 30 Km/h. Por cada cinco vueltas en la salida de la caja de cambios, las ruedas, cuyo radio es de 50 cm, dan una vuelta.

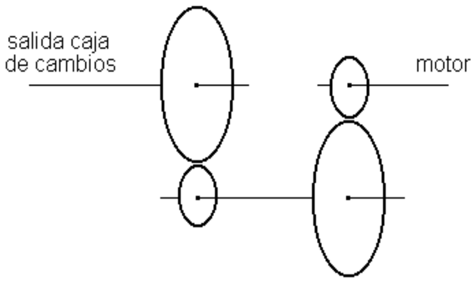

Figura 3.25

32. Consideremos una turbina hidráulica. Supongamos que el agua ingresa a la turbina con una velocidad $\vec{v}$, con $v = |\vec{v}| = 15$ m/s, formando un ángulo con la tangente al rotor en el punto de entrada $\alpha = 30°$ (ver figura 3.26). Suponga además que el radio externo del rotor es $R = 2$ m y que, en su estado estacionario, el rotor gira a 30 RPM (o sea, con frecuencia $\nu = 0,5$ s^{-1}).
La forma de las paletas de un rotor de una turbina hidráulica es tal que la velocidad relativa entre el agua que ingresa a la turbina y la paleta en el punto de entrada, sea tangente a la paleta (de esta manera el agua ingresa a la turbina sin choques).

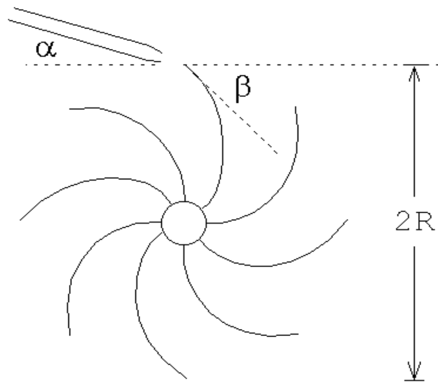

Figura 3.26

Determine el ángulo β entre la paleta del rotor y la tangente al rotor en el punto de entrada de agua. Encuentre también la velocidad relativa v_r del agua (respecto a la paleta) en ese punto.

Respuesta: $$\tan\beta = \frac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha\ - 2\pi R\nu}\ ; \qquad v_r = 10,06\ \ [\text{m/s}]\ .$$

33. Una partícula se mueve en el plano xy con una velocidad (que depende de la posición) $\vec{v} = a\hat{x} + bx\hat{y}$, donde a y b son constantes. En el instante inicial la partícula se encuentra en el origen ($x(0) = y(0) = 0$). Encuentre la ecuación de la trayectoria $y(x)$.

Respuesta: $$y(x) = \frac{b}{2a}x^2\ .$$

34. Un mono está colgado a una altura h de un árbol. Un cazador apunta con una cerbatana directamente al mono desde una distancia d (ver figura 3.27). En el mismo instante en que el cazador sopla el dardo envenenado el mono se suelta del árbol. ¿Sobrevivirá el mono? (Desprecie el efecto de fricción del dardo con el aire)

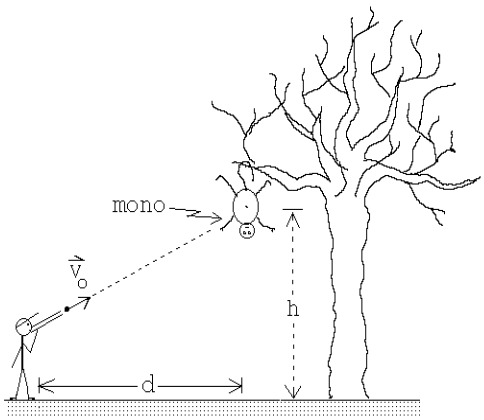

Figura 3.27

35. Una rueda gira en torno a un eje horizontal a 30 *rpm (1* rpm = una revolución por minuto = 1 vuelta por minuto), de manera que su parte inferior queda a nivel del suelo, pero sin rozarlo. (O sea, la rueda gira sin rodar).

    Sobre el borde de la rueda se han adosado dos piedrecitas, en posiciones diametralmente opuestas.

    a) Suponga que cuando el diámetro que une a las piedras pasa por la posición horizontal, éstas se desprenden del borde, en forma simultánea (figura 3.28a), y una de ellas llega al suelo antes que la otra. Se observa que durante el intervalo de tiempo entre la llegada al suelo de una y otra piedra, la rueda da una vuelta completa. Determine el radio de la rueda.

    b) ¿Qué ángulo α debe formar la línea que une a ambas piedras con la vertical para que, si las piedras se desprenden en esa posición, lleguen al suelo al mismo tiempo?

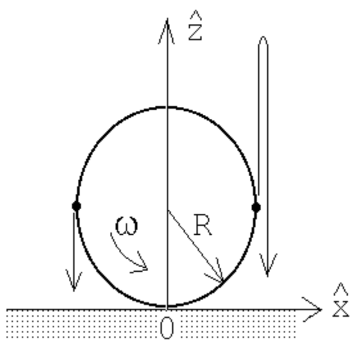

Figura 3.28a

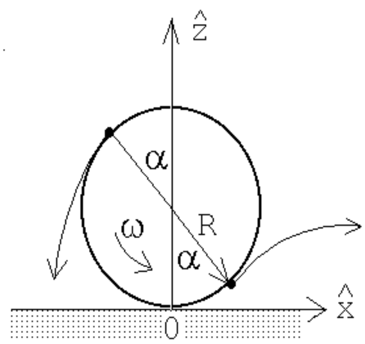

Figura 3.28b

36. Un globo sonda es soltado desde la tierra y se aleja con velocidad constante en trayectoria recta la cual forma un ángulo de 30° con la vertical. La velocidad del viento con respecto al suelo es de 10 [km/h], estable, hacia el norte.

    a) Calcule la velocidad del globo respecto al aire.

    b) Calcule el tiempo que tarda el globo en alcanzar una altura de 1 km con respecto al suelo.

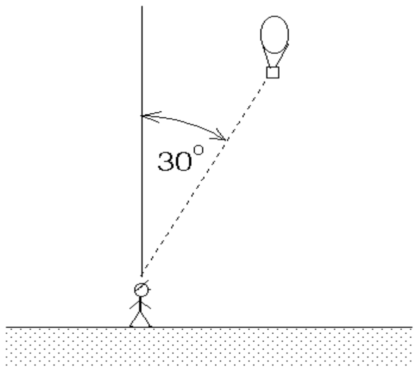

Figura 3.29

37. * Una rueda de radio 0,25 [m] ha estado girando en forma uniforme a razón de una revolución por segundo. En cierto instante la rueda es frenada y se detiene, uniformemente, después de haber girado media vuelta. Calcule la aceleración tangencial y centrípeta de un punto fijo en el borde de la rueda cuando ésta comienza a ser frenada.

38. Dos proyectiles son lanzados simultáneamente desde el mismo punto en un plano horizontal. Los proyectiles son lanzados con igual rapidez y con ángulos con respecto a la horizontal α y β, respectivamente ($\alpha < \beta$). Ambos proyectiles llegan al mismo punto en la horizontal pero a instantes diferentes. Demuestre que lo descrito es posible y encuentre la razón entre los tiempos de llegada. (Expresar el resultado en términos de α).

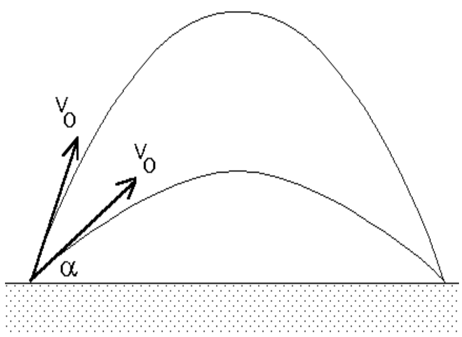

Figura 3.30

39. Un proyectil es lanzado desde un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación con la horizontal es α. Si el proyectil es lanzado con rapidez v_0 y con un ángulo de eyección β con respecto al plano (ver figura 3.31), calcule el alcance D del proyectil a lo largo del plano.

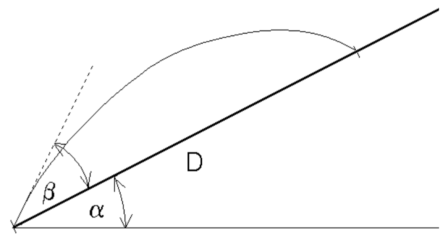

Figura 3.31

40. El *avix*, una apetitosa ave del tiempo de las cavernas, desarrolló por un proceso de evolución, una coraza en la parte inferior de su cuerpo de manera que los trogloditas no podían cazarlas con arcos y flechas.

    Ogú, un ingenioso troglodita, desarrolló un método para cazarla aprovechando que el ave no tiene coraza sobre el dorso. El disparaba flechas que impactaran al avix por arriba.

    Dados la velocidad del ave v_{ave}, la altura h a la que vuela, la velocidad v_0 con que la flecha es impulsada por el arco y el ángulo θ (respecto a la horizontal) con que el troglodita dispara la flecha, calcular:

    a) El tiempo que le toma a la flecha pasar por la altura h la segunda vez.

    b) El valor de la distancia d entre el ave y la vertical por el punto de lanzamiento, en el instante del lanzamiento, para que la flecha impacte al ave.

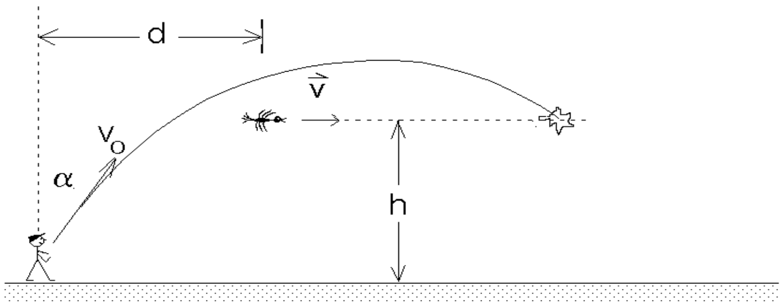

Figura 3.32

41. Se lanzan dos proyectiles A y B de modo que tienen igual alcance horizontal L. A se lanza horizontalmente desde una altura h, que es igual a la altura máxima que alcanza B durante su vuelo (ver figura 3.33)

    a) Calcule la razón entre los tiempos de vuelo de A y B.

    b) Calcule la razón entre las componentes horizontales de la velocidad de los proyectiles.

    c) ¿Cuál es la rapidez (magnitud de la velocidad) de cada uno de ellos al llegar al suelo?

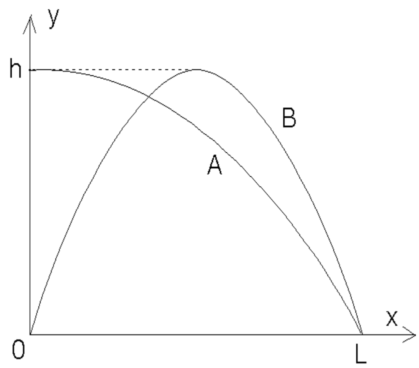

Figura 3.33

3.5. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 18.

Coloquemos el origen en el lugar en que está ubicado el cañón y sean $\hat{x}$ y $\hat{z}$ los ejes horizontal y vertical, respectivamente. La posición de la bala (siendo $t = 0$ el instante del disparo) vendrá dada por las coordenadas

$$x(t) = v_0 \cos\theta_0 \, t$$

y

$$z(t) = v_0 \sin\theta_0 \, t - \frac{1}{2} g t^2 \ .$$

La componente vertical de la velocidad de la bala será

$$v_z(t) = v_0 \sin\theta_0 \ - g t \ .$$

Sea t^* el instante en que la bala penetra por la ventana. En ese instante deben cumplirse las relaciones

$$v_0 \cos\theta_0 \ t^* = D$$

y

$$v_0 \sin\theta_0 \ t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = h \ .$$

La condición de que la bala penetre en forma horizontal por la ventana exige que en t^* la velocidad vertical de la bala sea nula. O sea, además de las dos relaciones anteriores, debe cumplirse que

$$v_0 \sin\theta_0 \ - g t^* = 0 \ .$$

Despejando t^* de la última relación y reemplazándola en las dos anteriores se obtiene

$$v_0^2 \sin\theta_0 \ \cos\theta_0 = D g \qquad (1)$$

y

$$v_0^2 \sin^2\theta_0 = 2 h g \ . \qquad (2)$$

Dividiéndo la última por la antepenúltima se encuentra

$$\tan\theta_0 = \frac{2h}{D} \ .$$

Esta relación permite encontrar el ángulo de elevación del disparo θ_0. Para determinar el valor de v_0 elevamos al cuadrado la ecuación (1):

$$v_0^4 \sin^2\theta_0 \ (1 - \sin^2\theta_0) = D^2 g^2 \ .$$

Despejando $\sin^2\theta_0$ de (2), sustituyéndolo en la última ecuación se encuentra para v_0 la expresión

$$v_0^2 = \frac{(D^2 + 4h^2) g}{2h} \ .$$

Solución al problema 30.

Sea x–y el plano en que se mueven los proyectiles, $\hat{z}$ el eje que apunta hacia arriba y coloquemos el origen en el lugar en que se encuentra el cañón.

Sea t el tiempo transcurrido desde el disparo de la bala # 1. La posición de esa bala viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_1(t) & = & v_0 \sin\theta_1\; t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x_1(t) & = & v_0 \cos\theta_1\; t \ . \end{array} \right.$$

Sea t' el tiempo transcurrido desde el disparo de la bala # 2. La posición de la segunda bala viene, análogamente, dada por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_2(t') & = & v_0 \sin\theta_2\; t' - \frac{1}{2} g t'^2 \\ x_2(t') & = & v_0 \cos\theta_2\; t' \ . \end{array} \right.$$

Para que las balas choquen deben coincidir las dos coordenadas de ambas balas, o sea, debe cumplirse

$$cos\theta_1\; t = cos\theta_2\; t' \tag{3.3}$$

y

$$v_0 \sin\theta_1\; t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin\theta_2\; t' - \frac{1}{2} g t'^2 \ . \tag{3.4}$$

Despejando t' de la primera de estas ecuaciones y reemplazándola en la segunda se obtiene

$$v_0 \sin\theta_1\; t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin\theta_2\, \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\; t - \frac{1}{2}\, g\, \frac{\cos^2\theta_1}{\cos^2\theta_2}\; t^2 \ .$$

Luego dividimos por t, multiplicamos por $\cos\theta_2$ y reordenamos los términos:

$$v_0\,(\cos\theta_2 \sin\theta_1 - \sin\theta_2 \cos\theta_1) = \frac{gt}{2\cos\theta_2}\; (\cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_1) \ . \tag{3.5}$$

Sea Δt el tiempo entre ambos disparos. Se tiene entonces que $t' = t - \Delta t$. Sustituyendo esto en (5.3) se encuentra que

$$t = \left(\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} \right)\; \Delta t \ . \tag{3.6}$$

Sustituyendo esta relación a su vez en (5.6), se obtiene:

$$v_0\; (\cos\theta_2 \sin\theta_1 - \sin\theta_2 \cos\theta_1) = \frac{g}{2}\; \frac{(\cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_1)}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}\; \Delta t \ ,$$

o sea,

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g}\; \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2} \simeq 11 \text{ s} \ .$$

Solución al problema 33.

Sea $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y}$ la posición de la partícula. Derivando respecto al tiempo se encuentra su velocidad:

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{x} + \dot{y}(t)\,\hat{y} \;.$$

Por otra parte, de acuerdo al enunciado, sabemos que

$$\vec{v}(t) = a\,\hat{x} + bx(t)\,\hat{y} \;.$$

Igualando ambas expresiones, componente a componente, obtenemos

$$\dot{x}(t) = a$$

y

$$\dot{y}(t) = bx(t) \;.$$

La primera de estas expresiones indica que, para la componente a lo largo del eje $\hat{x}$, el movimiento es uniforme, o sea,

$$x(t) = x(0) + at \;.$$

Pero, de acuerdo al enunciado, $x(0) = 0$, luego $x(t) = at$. Sustituyendo esto en la ecuación para $\dot{y}(t)$ se encuentra

$$\dot{y}(t) = bat \;.$$

De aquí se deduce que el movimiento a lo largo del eje $\hat{y}$ es uniformemente acelerado, luego

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{2}bat^2 = \frac{1}{2}bat^2 \;.$$

De esta manera hemos encontrado que las coordenadas x e y de la partícula, en función del tiempo, vienen dadas por

$$x = at$$
$$y = \frac{ab}{2}t^2 \;.$$

Despejando t de la primera de estas ecuaciones y reemplazándolo en la segunda, se obtiene finalmente la ecuación de la trayectoria

$$y = y(x) = \frac{b}{2a}x^2 \;.$$

Solución al problema 36.

a) Sea v_0 la velocidad del globo respecto a un observador fijo en la Tierra. La velocidad vertical y horizontal serán

$$v_z = v_0 \cos 30^\circ = \frac{v_0\sqrt{3}}{2}$$

y

$$v_x = v_0 \sin 30^\circ = \frac{v_0}{2} \ ,$$

respectivamente. La componente horizontal de la velocidad del globo debe coincidir con la del viento, o sea, $v_x = v_0/2 = v_v$. De aquí se deduce que $v_0 = 2v_v = 20$ km/h.

La componente vertical de la velocidad del globo es precisamente la velocidad con que éste se mueve respecto al aire (su movimiento horizontal se debe al viento). Esta velocidad vertical viene dada por $v_z = v_0\sqrt{3}/2 = 17,3...$ km/h.

b) Conociendo v_z es fácil evaluar el tiempo t^* que demora el globo en alcanzar una altura de $h = 1$ km. Este viene dado por

$$t^* = \frac{h}{v_z} \simeq \frac{1}{17,3} \quad [\mathrm{h}] \simeq 3,46 \quad [\mathrm{minutos}] \ .$$

Solución al problema 37.

Sea ω_0 la velocidad angular de la rueda antes de ser frenada: $\omega_0 = 2\pi$ s^{-1}. Sea α la aceleración angular que sufre la rueda al ser frenada. Si $t = 0$ es el instante en que se aplica el freno, se tiene que la velocidad angular vendrá dada por

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha\, t \ \ ,$$

mientras que el ángulo que rotará la rueda será

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \ .$$

Sea t^* el tiempo que tarda la rueda en quedar en reposo. De acuerdo al enunciado del problema, debe cumplirse que $\omega(t^*) = 0$ y $\theta(t^*) = \pi$, o sea,

$$\pi = \omega_0 t^* + \frac{1}{2}\alpha\, t^{*\,2} \qquad \text{y} \qquad \omega_0 + \alpha t^* = 0 \ .$$

De estas ecuaciones podemos despejar t^* y α. En particular para la aceleración angular se obtiene

$$\alpha = -\frac{\omega_0^2}{2\pi} = -2\pi \quad [\mathrm{s}^{-2}] \ .$$

La magnitud de la aceleración tangencial y centrípeta (ver sección 3.3) vienen dadas por $a_t = R\alpha$ y $a_c = -R\omega^2$. Usando estas expresiones con $R = 0,25$ [m] y $\omega = \omega_0 =$

2π s^{-1} se encuentra que la aceleraciones tangencial y centrípeta de un punto fijo en el borde de la rueda, cuando ésta comienza a ser frenada, son $a_t = -1,57$ [m/s^2] y $a_c = 9,87$ [m/s^2].

Solución al problema 41.

a) Lo que A tarda en llegar hasta el suelo es igual a lo que demora B desde su punto máximo (ambos ahí tienen una velocidad vertical nula). B demora lo mismo en subir que en bajar, luego la razón entre los tiempos de vuelo de A y B es

$$\frac{t_A}{t_B} = \frac{1}{2} \, .$$

b) La velocidad horizontal de ambos proyectiles es constante. Ambos recorren la misma distancia horizontal y como B para ello demora el doble que A, se deduce que la velocidad horizontal de B debe ser la mitad de la de A.

c) La velocidad vertical con que A y B llegan al suelo es la misma (la de una caída libre de una altura h). Esta es $v_v = \sqrt{2gh}$. El tiempo de caída de A es $t^* = \sqrt{(2h/g)}$. En ese tiempo A avanza en dirección horizontal una distancia horizontal L. Como la velocidad horizontal es uniforme se deduce que ésta (para la partícula A) debe ser $v_h = L/t^* = L\sqrt{g/(2h)}$. La rapidez de A cuando llega al suelo es, por lo tanto,

$$|\vec{v}_A(t^*)| = \sqrt{v_v^2 + v_h^2} = \sqrt{2gh + \frac{L^2 g}{2h}} \, .$$

Para la partícula B la componente vertical de la velocidad es la misma, mientras que la componente horizontal es la mitad de la de A, o sea,

$$|\vec{v}_B(t^*)| = \sqrt{v_v^2 + (v_h/2)^2} = \sqrt{2gh + \frac{L^2 g}{8h}} \, .$$