Segunda Tarea

Métodos de la Física Matemática II

Profesor Víctor Muñoz , Ayudante Cristóbal Espinoza

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad deChile.

- 26 de Septiembre 2002 -

Entregar antes o durante la clase del 03 de Septiembre de 2002.

1. Muestre que la transformada de *Fourier* de una función radialmente simétrica se puede reescribir como una transformada seno de *Fourier*:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{R}^3} f(r) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty r f(r) \sin(kr) dr$$

2. Demuestre las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(x-t) dt = -\int_0^\infty F_s(k) G_s(k) \cos(k) dk$$

donde f , g son funciones impares y F_s , G_s son sus respectivas transformadas de *Fourier* seno.

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(x-t) dt = \int_0^\infty F_c(k) G_c(k) \cos(k) dk$$

donde f , g son funciones pares y F_c , G_c son sus respectivas transformadas de *Fourier* coseno.

3. Resuelva la ecuación de *Poisson*

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$$

mediante la siguiente secuencia de operaciones:

- Tome la transformada de *Fourier* a ambos miembros de la ecuación y despeje la transformada de *Fourier* de $\Phi(\vec{r})$.
- Lleve a cabo la transformada inversa de *Fourier* usando el análogo tridimensional del teorema de convolución

$$\mathcal{F}\{f(\vec{r}) * g(\vec{r}), \vec{k}\} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} F(\vec{k}) G(\vec{k}) \ ,$$

donde $F(\vec{k})$ y $G(\vec{k})$ son las transformadas de *Fourier* tridimensionales de $f(\vec{r})$ y $g(\vec{r})$ respectivamente.

Definimos la transformada tridimensional de *Fourier* y su respectiva anti-transformada de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}\{f(\vec{r}),\vec{k}\} = F(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r f(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$
$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\vec{r}),\vec{k}\} = f(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r f(\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Es posible que necesite el siguiente resultado:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

4. Definimos

$$f_A(t) = \frac{1}{A^2+t^2}$$

y

$$f_B(t) = \frac{1}{B^2+t^2}$$

Evalúe $(f_A * f_B)(x)$

5. Considere la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

calcule el producto de convolución $f * f$.

Nota: Puede intercambiar el cuarto ejercicio por una reseña acerca de la vida de *Gibbs*, personaje que es nombrado en la termodinámica, la mecánica estadística, series de *Fourier*, etc., o de *Parseval*, nombre que aparece más de una vez en los apuntes del curso.