# Tercera Tarea

Métodos de la Física Matemática II

*Profesor Víctor Muñoz , Ayudante Cristóbal Espinoza*

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile.

- 03 de Octubre 2002 -

*Entregar antes o durante el 17 de Octubre de 2002.*

1. Si suponemos que $f(x)$ es de orden exponencial, determine si

$$\int_0^x f(t)dt \quad y$$

$$f'(t)$$

son de orden exponencial

2. Sea $f(t) \in \mathbf{S}$ . Suponga que $f^{(s)}(t=0)$ es no nulo (*por ejemplo si* $s=2$). Además $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = I$ (*no nula*). Sea $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a cero.

   - Muestre que
   $$f_n(t) = S_n f(t)$$
   converge fuertemente a cero.
   - Definimos
   $$g_n(t) = \frac{1}{n} f\left(\frac{t}{n^2}\right)$$
   $$h_n(t) = \frac{1}{n} f(nt)$$
   Haga ver que $g_n(x)$ y $h_n(x)$ convergen uniformemente a cero, pero no lo hacen fuertemente. En particular defina $\phi = \overline{g(x)}$ , con $g(x) = 1$ y haga ver que
   $$\lim_{n\to\infty} < \phi, g_n >= \infty$$
   y muestre también que
   $$\lim_{n\to\infty} < \delta^{(2)}, h_n >= \infty$$

3. Sea $\delta(\vec{\rho})$ la función generalizada "delta" en dos dimensiones. Muestre que se satisface

$$\delta(\vec{\rho}) = -\frac{1}{2\pi}\nabla^2 \overline{\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)}$$

4. Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'\left[\frac{1}{4}\left(x^2 - a^2\right)\right]|x|dx$

5. Realice dos de las siguientes tres misiones:

- Evalúe $< \overline{\delta\left(\frac{x^2-a^2}{A^2}\right)}, f >$
- Evalúe $< \overline{x^2}\delta^{(2)}(x), f >$
- Invetsigue acerca de la vida de Dirac.

Puede escoger entre el ejercicio 2 y el 3.

Los siguientes ejercicios son para que se entretenga en sus largos ratos libres. Solamente serán evaluados los ajercicios anteriores y no es necesario que entregue resueltos los que siguen.

**1** Demostrar que la delta de Dirac $\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \delta(x_1 - x'_2)\delta(x_2 - x'_2)\delta(x_3 - x'_3)$ al escribirla en términos de las coordenadas $\xi_1$ , $\xi_2$ , $\xi_3$ , transforma de acuerdo a

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{|\mathbf{J}(\vec{x},\vec{\xi})|}\delta(\xi_1 - \xi'_1)\delta(\xi_2 - \xi'_2)\delta(\xi_3 - \xi'_3) \ ,$$

donde $\mathbf{J}(\vec{x},\vec{\xi})$ es el *Jacobiano* de la transformación de coordenadas.

**2** Usando las funciones generalizadas delta de Dirac en las coordenadas apropiadas expresar las siguientes distribuciones de carga en términos de la densidad de carga tridimensional que se menciona en cada caso.

- En coordenadas esféricas, una carga $Q$ distribuida uniformemente sobre una esfera de radio $a$ .
- En coordenadas cilíndricas, una densidad lineal de carga $\lambda$ distribuida uniformemente sobre una superficie cilíndrica de radio $b$ .
- En coordenadas cilíndricas, una carga $Q$ distribuida uniformemente sobre un disco circular de radio $R$ .
- El mismo disco anterior, pero en coordenadas esféricas.