

**Universidad de Chile**  
**Facultad de Ciencias**  
**Departamento de Física**

**Introducción a los Métodos de la Física Matemática**

Tarea N° 1  
Publicada el 10 de Septiembre de 2002

Profesor: José Rogan  
Ayudantes: Daniella Fabri  
Areli Zúñiga.

1. La energía de interacción entre dos dipolos de momentos  $\vec{\mu}_1$  y  $\vec{\mu}_2$  puede ser escrita vectorialmente como

$$U = -\frac{\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2}{r^3} + \frac{3(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\mu}_2 \cdot \vec{r})}{r^5}$$

y en la forma escalar

$$U = \frac{\mu_1 \mu_2}{r^3} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi)$$

donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos de  $\vec{\mu}_1$  y  $\vec{\mu}_2$  respecto a  $\vec{r}$ , mientras  $\varphi$  es el ángulo azimutal de  $\vec{\mu}_2$  respecto a el plano  $\vec{\mu}_1 - \vec{r}$ . Demuestre que estas dos formas de escribir la ecuación son equivalentes.

2. Dados los tres vectores,

$$\begin{aligned}\vec{p} &= 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} , \\ \vec{q} &= -6\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} , \\ \vec{r} &= \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k} ,\end{aligned}$$

encuentre dos que sean perpendiculares y dos que sean paralelos.

3. El campo magnético  $\vec{B}$  está definido por la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = \frac{q}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) , \quad (\text{cgs}).$$

Llevando a cabo tres experimentos, encontramos que si

$$\begin{aligned}\vec{v} = \hat{i} , \quad \frac{\vec{F}c}{q} &= 2\hat{k} - 4\hat{j} , \\ \vec{v} = \hat{j} , \quad \frac{\vec{F}c}{q} &= 4\hat{i} - \hat{k} , \\ \vec{v} = \hat{k} , \quad \frac{\vec{F}c}{q} &= \hat{j} - 2\hat{i} .\end{aligned}$$

A partir de los resultados de estos tres experimentos individuales calcule el campo magnético  $\vec{B}$ .

4. El momento angular de una partícula está dado por  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$ . Con las velocidades angular y lineal relacionadas por  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , muestre que

$$\vec{L} = mr^2[\vec{\omega} - \hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{\omega})] .$$

5. Un vector  $\vec{A}$  es descompuesto en un vector radial  $\vec{A}_r$  y uno tangencial  $\vec{A}_t$ . Si  $\hat{r}$  es un vector unitario en la dirección radial, muestre que:

- (a)  $\vec{A}_r = \hat{r}(\vec{A} \cdot \hat{r})$  y  
(b)  $\vec{A}_t = -\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A})$ .

6. Dados

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}, \quad \vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}, \quad \vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}$$

y  $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} \neq 0$ , muestre que:

- (a)  $\vec{x}' \cdot \vec{y}' = \delta_{xy}$ , ( $\vec{x}, \vec{y} = \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ),  
(b)  $\vec{a}' \cdot \vec{b}' \times \vec{c}' = (\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c})^{-1}$ ,  
(c)  $\vec{a} = \frac{\vec{b}' \times \vec{c}'}{\vec{a}' \cdot \vec{b}' \times \vec{c}'}$  y así (es decir, también demuestre para  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$ )

ENTREGA 17 DE SEPTIEMBRE DEL 2002, ANTES DE LAS 10:15 A.M.