

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Introducción a los Métodos de la Física Matemática

Tarea N° 1

Publicada el 10 de Septiembre de 2002

Profesor: José Rogan

Ayudantes: Daniella Fabri
Areli Zúñiga.

1. La energía de interacción entre dos dipolos de momentos $\vec{\mu}_1$ y $\vec{\mu}_2$ puede ser escrita vectorialmente como

$$U = -\frac{\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2}{r^3} + \frac{3(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\mu}_2 \cdot \vec{r})}{r^5}$$

y en la forma escalar

$$U = \frac{\mu_1 \mu_2}{r^3} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi)$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos de $\vec{\mu}_1$ y $\vec{\mu}_2$ respecto a \vec{r} , mientras φ es el ángulo azimutal de $\vec{\mu}_2$ respecto a el plano $\vec{\mu}_1 - \vec{r}$. Demuestre que estas dos formas de escribir la ecuación son equivalentes.

2. Dados los tres vectores,

$$\begin{aligned}\vec{p} &= 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} , \\ \vec{q} &= -6\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} , \\ \vec{r} &= \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k} ,\end{aligned}$$

encuentre dos que sean perpendiculares y dos que sean paralelos.

3. El campo magnético \vec{B} está definido por la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = \frac{q}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) , \quad (\text{cgs}).$$

Llevando a cabo tres experimentos, encontramos que si

$$\begin{aligned}\vec{v} = \hat{i} , \quad \frac{\vec{F}c}{q} &= 2\hat{k} - 4\hat{j} , \\ \vec{v} = \hat{j} , \quad \frac{\vec{F}c}{q} &= 4\hat{i} - \hat{k} , \\ \vec{v} = \hat{k} , \quad \frac{\vec{F}c}{q} &= \hat{j} - 2\hat{i} .\end{aligned}$$

A partir de los resultados de estos tres experimentos individuales calcule el campo magnético \vec{B} .

4. El momento angular de una partícula está dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$. Con las velocidades angular y lineal relacionadas por $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, muestre que

$$\vec{L} = mr^2[\vec{\omega} - \hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{\omega})] .$$

5. Un vector \vec{A} es descompuesto en un vector radial \vec{A}_r y uno tangencial \vec{A}_t . Si \hat{r} es un vector unitario en la dirección radial, muestre que:

- (a) $\vec{A}_r = \hat{r}(\vec{A} \cdot \hat{r})$ y
 (b) $\vec{A}_t = -\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A})$.

6. Dados

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}, \quad \vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}, \quad \vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}$$

y $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} \neq 0$, muestre que:

- (a) $\vec{x}' \cdot \vec{y} = \delta_{xy}$, ($\vec{x}, \vec{y} = \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$),
 (b) $\vec{a}' \cdot \vec{b}' \times \vec{c}' = (\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c})^{-1}$,
 (c) $\vec{a} = \frac{\vec{b}' \times \vec{c}'}{\vec{a}' \cdot \vec{b}' \times \vec{c}'}$ y así (es decir, también demuestre para \vec{b} y \vec{c})

ENTREGA 17 DE SEPTIEMBRE DEL 2002, ANTES DE LAS 10:15 A.M.