Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Introducción a los Métodos de la Física Matemática

Tarea Nº 2
Publicada el 17 de Septiembre de 2002

Profesor: José Rogan
Ayudantes: Daniella Fabri
Areli Zúñiga.

1. (a) Si una función vectorial depende de las coordenadas espaciales (x, y, z) y temporal t, muestre que

$$d\vec{F} = (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} dt \tag{1}$$

   (b) Muestre que una condición necesaria y suficiente para que $u(x, y, z))$ y $v(x, y, z)$ estén relacionadas por la misma función $f(u, v) = 0$ es que $(\vec{\nabla} u) \times (\vec{\nabla} v) = 0$

2. Calcule la divergencia del campo electrostático de una carga puntual localizado en el origen del sistema de coordenadas. ¿Qué pasa en el origen?

3. (a) Muestre que $\vec{u} \times \vec{v}$ es solenoidal si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son cada uno irrotacional.

   (b) Si $\vec{A}$ es irrotacional, demuestre que $\vec{A} \times \vec{r}$ es solenoidal.

   (c) Una función vectorial $\vec{f}(x, y, z)$ no es irrotacional, pero el producto de $\vec{f}$ y una función escalar $g(x, y, z)$ es irrotacional. Demuestre que

$$\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{f} = 0 \ .$$

4. Un dipolo eléctrico de momento $\vec{p}$ es localizado en el origen del sistema de coordenadas. El dipolo un potencial eléctrico en $\vec{r}$ dado por

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \ . \qquad \text{(cgs)}$$

   Encuentre el campo eléctrico en $\vec{r}$.

5. En la teoría de Pauli del electrón uno encuentra la expresión

$$(\vec{p} - e\vec{A}) \times (\vec{p} - e\vec{A})\Psi \ ,$$

   donde Ψ es una función escalar. $\vec{A}$ es el potencial vector magnético relacionado con el campo magnético $\vec{B}$. Dado que $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ (mecánica cuántica), demuestre que esta expresión se reduce a $ie\vec{B}\Psi$

6. la creación de un sistema localizado de corrientes eléctricas estacionarias (densidad de corriente $\vec{J}$) y campos magnéticos puede demostrase que requiere una cantidad de trabajo igual a

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} \cdot \vec{B}\, dv \ , \qquad \text{(cgs)}$$

transforme esto en

$$W = \frac{1}{2c} \int \vec{J} \cdot \vec{A}\, dv \ , \qquad \text{(cgs)}$$

aquí $\vec{A}$ es el potencial vector magnético y c es la velocidad de la luz en el vacío.

Hint: En las ecuaciones de Maxwell tome el término de corrientes de desplazamiento $\partial\vec{D}/c\partial t = 0$. Si los campos y corrientes son localizados, una superficie de contorno puede ser tomada suficientemente lejos tal que las integrales de los campo y las corrientes sobre la superficie sea igual a cero.

Entrega 24 de Septiembre del 2002, antes de las 10:15 a.m.