Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Introducción a los Métodos de la Física Matemática

Tarea Nº 3
Publicada el 26 de Septiembre de 2002

Profesor: José Rogan
Ayudantes: Daniella Fabri
Areli Zúñiga.

1. Usando una sucesión a la δ muestre que

$$x\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x) \ .$$

2. Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x)\, dx = -f'(0) \ .$$

Aquí nosotros suponemos $f'(x)$ es continua en $x = 0$.

3. *a*) Si definimos una sucesión $\delta_n(x) = n/(2\cosh^2 nx)$, muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\, dx = 1 \ , \quad \text{independiente de } n.$$

b) Continuando este análisis, muestre que

$$\int_{-\infty}^{x} \delta_n(t)\, dt = \frac{1}{2}(1 + \tanh nx) \equiv h_n(x)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \begin{cases} 0 \ , & x < 0 \ , \\ 1 \ , & x > 0 \ . \end{cases}$$

Esta es la función escalón de Heaviside.

4. El sistema de coordenadas elíptico–cilíndricas consiste de tres familias de superficies:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2\cosh^2 u} + \frac{y^2}{a^2 \operatorname{senh}^2 u} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2\cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 v} &= 1 \\ z &= z \end{aligned}$$

Bosqueje las superficies $u =$ constante y $v =$ constante como ellas se intersectan en el primer cuadrante del plano xy. Muestre los vectores unitarios $\hat{u}$ y $\hat{v}$. El intervalo de u es $0 \leq u < \infty$ y el de v es $0 \leq v \leq 2\pi$

5. *a*) Resuelva los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas en sus componentes cartesianas.

   b) Resuelva los vectores unitarios de las coordenadas cartesianas en sus componentes cilíndricas.

6. *a*) Muestre que $\vec{r} = \hat{\rho}\rho + \hat{z}z$

   b) Trabajando completamente en coordenadas circulares cilíndricas, muestre que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{r} = 0 \ .$$

Entrega 03 de Octubre del 2002, antes de las 10:15 a.m.