

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Introducción a los Métodos de la Física Matemática

Tarea N° 4
Publicada el 03 de Octubre de 2002

Profesor: José Rogan
Ayudantes: Daniella Fabri
Areli Zúñiga.

1. A una gran distancia de su fuente, la radiación dipolar eléctrica tiene los siguientes campos:

$$\vec{E} = a_E \operatorname{sen} \theta \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \hat{\theta}, \quad \vec{B} = a_B \operatorname{sen} \theta \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \hat{\phi}.$$

Demuestre que las ecuaciones de Maxwell (MKS)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

se satisface si tomamos

$$\frac{a_E}{a_B} = \frac{\omega}{k} = c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$$

2. Demuestre que

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}.$$

3. Muestre que

- a) $\delta_{ii} = 3$,
- b) $\delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = 0$,
- c) $\varepsilon_{ipq} \varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$,
- d) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$.

4. a) Expresando el producto cruz en términos de los símbolos de Levi-Civita (ε_{ijk}), derive la regla $BAC - CAB$.
b) Muestre la identidad vectorial

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

utilice la definición de producto cruz con Levi-Civita

5. Un cristal triclinico es descrito usando un sistema de coordenadas oblicuo. Los tres vectores covariantes de la base son

$$\varepsilon_1 = 1,5\hat{x}$$

$$\varepsilon_2 = 0,4\hat{x} + 1,6\hat{y},$$

y

$$\varepsilon_3 = 0,2\hat{x} + 0,3\hat{y} + 1,0\hat{z}$$

- a) Calcule los elementos de la métrica covariante g^{ij} .
- b) Calcule los símbolos de Christoffel de tres índices, Γ_{ij}^k (Esto es por “simple inspección”)
- c) Del producto cruz,

$$\varepsilon^i = \frac{\varepsilon_j \times \varepsilon_k}{\varepsilon_j \times \varepsilon_k \cdot \varepsilon_i},$$

calcule la base contravariante del vector ε^3 .

- d) Usando la forma explícita de ε^3 y ε_i , verifique que $\varepsilon^3 \cdot \varepsilon_i = \delta_i^3$.

ENTREGA 10 DE OCTUBRE DEL 2002, ANTES DE LAS 10:15 A.M.