Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Introducción a los Métodos de la Física Matemática

Tarea Nº 5
Publicada el 11 de Octubre del 2002

Profesor: José Rogan
Ayudantes: Daniella Fabri, Areli Zúñiga

1. Dado $A_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_{ij}$ con $B_{ij} = -B_{ji}$, muestre que

$$B_{mn} = \varepsilon_{mnk}A_k$$

2. *a*) Muestre que $\vec{A} = -\hat{\varphi}(\cot\theta)/r$ es solución de $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{r}/r^2$

   b) Muestre que ésta solución en coordenadas esféricas concuerda con la solución

$$\vec{A} = \hat{\imath}\frac{yz}{r(x^2+y^2)} - \hat{\jmath}\frac{xz}{r(x^2+y^2)}$$

   Note que la solución diverge para $\theta = 0, \pi$ o correspondientemente para x, $y = 0$.

   c) Muestre que $\vec{A} = -\hat{\theta}\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta/r$ también es solución.

3. *a*) Partiendo de $\vec{\nabla}\Psi = \hat{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$ muestre que

$$\vec{L} = -i(\vec{r}\times\vec{\nabla}) = i\left(\hat{\theta}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \hat{\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{1}$$

   b) Resolviendo $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$ en componentes cartesianas, determine L_x, L_y y L_z en términos de θ, φ y sus derivadas.

   c) A partir de $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ muestre que

$$L^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = -r^2\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{2}$$

4. Solucione el siguiente sistema de ecuaciones lineales. Dé el resultado con cinco decimales

$$\begin{array}{llllllcl}
1{,}0x_1+ & 0{,}9x_2+ & 0{,}8x_3+ & 0{,}4x_4+ & 0{,}1x_5 & & = & 1{,}0\\
0{,}9x_1+ & 1{,}0x_2+ & 0{,}8x_3+ & 0{,}5x_4+ & 0{,}2x_5+ & 0{,}1x_6 & = & 0{,}9\\
0{,}8x_1+ & 0{,}8x_2+ & 1{,}0x_3+ & 0{,}7x_4+ & 0{,}4x_5+ & 0{,}2x_6 & = & 0{,}8\\
0{,}4x_1+ & 0{,}5x_2+ & 0{,}7x_3+ & 1{,}0x_4+ & 0{,}6x_5+ & 0{,}3x_6 & = & 0{,}7\\
0{,}1x_1+ & 0{,}2x_2+ & 0{,}4x_3+ & 0{,}6x_4+ & 1{,}0x_5+ & 0{,}5x_6 & = & 0{,}6\\
 & 0{,}1x_2+ & 0{,}2x_3+ & 0{,}3x_4+ & 0{,}5x_5+ & 1{,}0x_6 & = & 0{,}5
\end{array}$$

5. Una descripción de partículas de spin 1 usa las matrices

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Muestre que

a) $[M_x, M_y] = iM_z$, y así sucesivamente (permutando cíclicamente los índices). Usando el símbolo de Levi–Civita podemos escribir $[M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k$.

b) $M^2 \equiv M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = 2 1_{33}$, donde 1_{33} es la matriz identidad de 3×3.

c) $[M^2, M_i] = 0$,
$[M_z, L^+] = L^+$,
$[L^+, L^-] = 2M_z$,
donde $L^+ \equiv M_x + iM_y$ y $L^- \equiv M_x - iM_y$.

Entrega 19 de Octubre del 2002, antes de la prueba