

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Introducción a los Métodos de la Física Matemática

Tarea N° 6
Publicada el 18 de Octubre del 2002

Profesor: José Rogan
Ayudantes: Daniella Fabri
Areli Zúñiga

1. Masas unitarias están en las ocho esquinas de un cubo $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Encuentre la matriz de inercia respecto al origen y muestre que hay degeneración triple. Esto significa que en cuanto a los momentos de inercia concierne, la estructura cúbica exhibe simetría esférica.
2. Una matriz no hermítica A tiene autovalores λ_i y los correspondientes autovectores $|u_i\rangle$. la matriz adjunta A^\dagger tiene los mismos autovalores pero los correspondientes autovectores diferentes, $|v_i\rangle$. Muestre que los autovectores forman un conjunto *biortogonal* en el sentido que

$$\langle v_i | u_j \rangle = 0 \quad \text{para } \lambda_i^* \neq \lambda_j .$$

3. Dado

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

- a) Construya la traspuesta \tilde{A} y las formas simétricas $\tilde{A}A$ y $A\tilde{A}$.
 - b) A partir $A\tilde{A}|g_n\rangle = \lambda_n^2|g_n\rangle$ encuentre λ_n y $|g_n\rangle$. Normalice los $|g_n\rangle$.
 - c) A partir $\tilde{A}A|f_n\rangle = \lambda_n^2|f_n\rangle$ encuentre λ_n y $|f_n\rangle$. Normalice los $|f_n\rangle$.
 - d) Verifique que $A|f_n\rangle = \lambda_n|g_n\rangle$ y $\tilde{A}|g_n\rangle = \lambda_n|f_n\rangle$.
 - e) Verifique que $A = \sum_n \lambda_n |g_n\rangle\langle f_n|$.
4. Muestre que una matriz unitaria de $n \times n$ tiene $n^2 - 1$ parámetros independientes.
 5. Pruebe que el número de elementos distintos en un coseto de un subgrupo es el mismo que el número de elementos en el subgrupo.
 6. Un subgrupo H tiene elementos h_i . x es un elemento fijo del grupo original G y no es miembro de H . La transformación

$$xh_ix^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

generan un subgrupo conjugado xHx^{-1} . Muestre que este subgrupo conjugado satisface cada uno de los cuatro postulados para ser grupo y por lo tanto es un grupo.