Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Métodos de la Física Matemática I

Tarea Nº 6 — Profesor: José Rogan
Publicada el 16 de Julio de 2002 — Ayudante: Xavier Andrade.

1. Muestre que
$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}} \ , \quad a>1.$$

2. Una partícula atómica esta confinada dentro de una caja rectangular de lados a, b y c. La partícula está descrita por una función de onda ψ que satisface la ecuación de Schrödinger tiempo independiente
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \ .$$
La función de onda se debe anular en cada superficie de la caja (pero no debe ser identicamente cero en el volumen). Esta condicion impone restricciones a las constantes de separación y por consiguiente a la energía E. Encuentre las posibles funciones de onda resultantes y muestre que el valor más pequeño posible para la energía es
$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \ .$$

3. La ecuación de Schrödinger unidimensional para una partícula en un potencial armónico es
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi = E\psi\left(x\right) \ ,$$
Usando $\xi = ax$ y una constante λ, tenemos
$$a = \left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$\lambda = \frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$
Escriba la ecuación en términos de ξ y λ. Considere que $\psi\left(\xi\right) = y\left(\xi\right)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ y muestre que $y\left(\xi\right)$ satisface la ecuación de Hermite.

4. (a) Si φ es una solucion de la ecuación de Laplace, muestre que $\partial\varphi/\partial z$ es también una solución de la misma ecuación.

   (b) Verifique que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación de Laplace:

      i.-
$$\varphi_1 = \frac{1}{r}$$

      ii.-
$$\varphi_2 = \frac{1}{2r} \ln \frac{r+z}{r-z}$$

Fecha de entrega: Martes 23 de Julio a las 12:00 del mediodía.