Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Métodos de la Física Matemática I

Tarea Nº 3 — Profesor: José Rogan
20 de Junio de 2008 — Ayudantes: Max Ramírez, Alejandro Varas

Todos los problemas deben ser entregados en un pdf, generado a partir de LaTeX. Si se entrega algún ejercicio que debe ser tipeado no tipeado, se evaluará con un tercio de su nota real.

1. Describir una superficie de Riemann para la función multivaluada
$$f(z)=\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

2. Considere la función
$$f(z)=\sqrt{z^3+z} .$$
Indique la cantidad de puntos de ramificación, cuáles son y el orden de ellos.

3. Escribir las dos series de Laurent en potencias de z que representan la función
$$f(z)=\frac{1}{z(1+z^2)}$$
en ciertos dominios, y especificar esos dominios

4. Hallar el desarrollo en serie de Laurent para la función $\frac{1}{z-a}$ en el dominio $|a|<|z|<\infty$, donde a es real y $-1<a<1$. A continuación, escribir $z=e^{i\theta}$ para obtener las fórmulas de suma
$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n\cos(n\theta)=\frac{a\cos(\theta)-a^2}{1-2a\cos(\theta)+a^2} , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{sen}(n\theta)=\frac{a\operatorname{sen}(\theta)}{1-2a\cos(\theta)+a^2}$$

5. Sea f una función análitica en un dominio anular ($R_1<|z-z_0|<R_2$) en torno del origen que contiene al círculo unidad $z=e^{i\phi}$ ($-\pi\leq\phi\leq\pi$). Tomando ese círculo como camino de integración para obtener los coeficientes a_n y a_{-n} en una serie de Laurent en potencias de z, probar que
$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})d\phi+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})\left[\left(\frac{z}{e^{i\phi}}\right)^n+\left(\frac{e^{i\phi}}{z}\right)^n\right]d\phi$$
cuando z es cualquier punto del dominio anular.

   Haciendo $u(\theta)=\mathrm{Re}[f(e^{i\phi})]$, probar que del desarrollo de la parte anterior se sigue
$$u(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)d\phi+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)\cos[n(\theta-\phi)]d\phi$$

Esta es una forma de escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función real $u(\theta)$ en el intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$. La restricción sobre $u(\theta)$ es más severa de lo necesario para que sea factible tal representación en serie de Fourier.

6. Use la expansión

$$\frac{1}{z^2 \operatorname{senh} z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \frac{7}{360} z + \cdots$$

para demostrar que si C es el círculo $|z| = 1$ en sentido antihorario, se tiene

$$\int_C \frac{dz}{z^2 \operatorname{senh} z} = -\frac{\pi i}{3} \; .$$

7. Encuentre la serie de Laurent de

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} \; ,$$

en torno a la singularidad $z = -2$. Caracterize la singularidad e indique la región de convergencia.

8. Evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2} \, dx \; , \qquad a > b > 0 \; .$$

9. Probar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} \; .$$

10. Evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} \, dx \; .$$

11. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 - \pi^2} \, dx \; .$$

12. Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} \, dx = \frac{7\pi}{50} \; .$$

13. La función gama, definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt \; ,$$

converge para $\operatorname{Re} z > 0$, y define una función analítica en el semiplano derecho.

   i) Demuestre que $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.
   ii) Utilice la parte (i) para prolongar analíticamente en el semiplano izquierdo.
   iii) Demuestre que la función F, definida por Γ y su prolongación, es analítica en todas partes, excepto en $z = -n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

14. Sea D la franja con $a < y < b$, $-\infty < x < \infty$. Hallar una función $\phi(x, y)$ que sea armónica en D y que satisfaga $\phi(x, a) = \phi_1$ y $\phi(x, b) = \phi_2$ para $-\infty < x < \infty$, donde ϕ_1 y ϕ_2 son constantes reales.

15. *a*) Demuestre que la función $z = e^{\pi w/a}$ aplica la mitad superior del plano z sobre la franja D comprendida entre las rectas $v = 0$ y $v = a$ en el plano w.

    b) Utilice esta transformación para encontrar una función $\phi(x, y)$ que sea armónica en la mitad superior del plano z y satisfaga las condiciones de frontera $\phi(x, 0) = \phi_1$ para $x > 0$ y $\phi(x, 0) = \phi_2$ para $x < 0$.

16. Considere la ecuación del calor $\nabla^2 T(x, y) = 0$, definida para el semiplano superior $y > 0$, y con las condiciones de borde $T(x, 0) = 1$ para $|x| < 1$ y cero fuera. Por supuesto, $T(x, y \to \infty) = 0$. Obtenga la solución $T(x, y)$ mediante el procedimiento de mapear el problema a uno más simple, mediante la transformación

$$w = \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) .$$

En particular, encuentre la forma de las isotermas y dibújelas con un *software* apropiado[1].

Fecha de entrega: Martes 12 de Julio, **antes** de comenzar la prueba.

[1]Se recomienda **encarecidamente** usar GNUPLOT.