Capítulo 10

Aplicaciones de la transformada de Laplace

10.1 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

1) Consideremos la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 1 \ , \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \ .$$

Para resolverla, aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}, s\right\} - \mathcal{L}\left\{y, s\right\} = \mathcal{L}\left\{1, s\right\} \ ,$$

donde interpretamos la función constante 1 como 1 para $t \geq 0$ y 0 para $t < 0$. Evaluamos la transformada de la segunda derivada, usando las propiedades enunciadas en el capítulo anterior.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}, s\right\} = s^2\ Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2\ Y(s) - 1 \ ,$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}\left\{y, s\right\}$. Usando lo anterior en la ecuación diferencial tenemos

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - 1 - Y(s) &= \frac{1}{s} \\ (s^2 - 1)Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{s}{s} = \frac{1+s}{s} \\ Y(s) = \frac{s+1}{s}\frac{1}{s^2-1} &= \frac{1}{s}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \ . \end{aligned}$$

Retransformando,

$$y(t) = e^t - 1 \ .$$

2) Consideremos la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = t \;, \qquad y(1) = a,\; y(2) = b \;.$$

Encontremos la solución para $y(t)$. Primero hacemos el cambio de variable $x = t - 1$ con $u(x) = y(t)$, de esta manera la ecuación nos queda

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = x + 1 \;, \qquad u(0) = y(1) = a,\; u(1) = b \;.$$

Aplicamos la transformada de Laplace. Definiendo $\mathcal{L}\left\{u, s\right\} = U(s)$ y $u'(0) = \gamma$, tenemos

$$\begin{aligned} s^2U(s) - su(0) - u'(0) - U(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \\ (s^2-1)U(s) &= as + \gamma + \frac{1+s}{s^2} \\ U(s) &= \frac{as}{s^2-1} + \frac{\gamma}{s^2+1} + \frac{1}{s^2(s-1)} \;. \end{aligned}$$

Retransformando,

$$u(x) = a\cosh(x) + \gamma\,\mathrm{senh}(x) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}, x\right\} \;.$$

Haciendo notar que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{x'}\,dx', s\right\} &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{e^t, s\right\} = \frac{1}{s}\frac{1}{s-1} \\ \mathcal{L}\left\{\int_0^x dx' \int_0^{x'} e^{x''}\,dx'', s\right\} &= \frac{1}{s}\;\mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{x'}\,dx', s\right\} = \frac{1}{s}\;\frac{1}{s}\;\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2(s-1)} \;, \end{aligned}$$

se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}, x\right\} = \int_0^x dx' \int_0^{x'} e^{x''}\,dx'' = \int_0^x (e^{x'} - 1)\,dx' = e^x - 1 - x \;.$$

Finalmente

$$u(x) = a\cosh(x) + \gamma\,\mathrm{senh}(x) + e^x - (1 + x) \;.$$

Expresando la solución en la variable original,

$$y(t) = a\cosh(t-1) + \gamma\,\mathrm{senh}(t-1) + e^{t-1} - t \;.$$

Comprobamos la condición inicial:

$$\begin{aligned} y(1) &= a\cosh(0) + \gamma\,\mathrm{senh}(0) + e^0 - 1 \;, \\ y(1) &= a + 0 + 1 - 1 = a \;. \end{aligned}$$

Para determinar $\gamma = u'(0)$ usamos $y(2) = b$:

$$
\begin{aligned}
y(2) &= a\cosh(1) + \gamma \operatorname{senh}(1) + e - 2 = b \\
\gamma &= \frac{2 + b - e - a\cosh(1)}{\operatorname{senh}(1)} \ .
\end{aligned}
$$

En general, la ecuación diferencial

$$
\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \alpha\frac{d}{dt}x(t) + \beta x(t) = f(t)h(t) \ ,
$$

donde $h(t)$ corresponde a la función escalón de Heaviside, tiene por solución:

$$
x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\xi, t\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} ds\, e^{st}\xi(s) \ ,
$$

con

$$
\xi(s) = \mathcal{L}\left\{x, s\right\} = \frac{1}{s^2 + \alpha s + \beta}\left[\mathcal{L}\left\{f(t), s\right\} + (\alpha + s)x(0) + x'(0)\right] \ .
$$

10.2 Ecuaciones integrales

Sea la ecuación integral para $f(x)$

$$
g(x) = \lambda f(x) + \int_0^x f(\alpha)K(x-\alpha)\, d\alpha \ , \tag{10.1}
$$

donde $g(x)$ y $K(x)$ son funciones dadas. Busquemos la solución aplicando la transformada

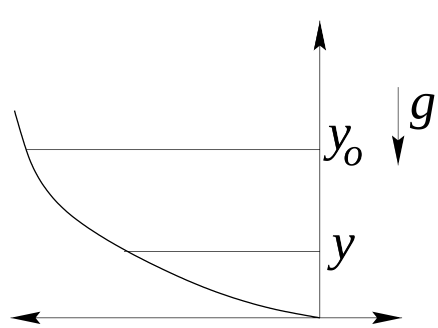
$$
\mathcal{L}\left\{g(x), s\right\} = \lambda\mathcal{L}\left\{f(x), s\right\} + \mathcal{L}\left\{f * K(x), s\right\} = \lambda\mathcal{L}\left\{f(x), s\right\} + \mathcal{L}\left\{f(x), s\right\}\mathcal{L}\left\{K(x), s\right\} \ .
$$

Despejando,

$$
\mathcal{L}\left\{f(x), s\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{g(x), s\right\}}{\lambda + \mathcal{L}\left\{K(x), s\right\}} \ . \tag{10.2}
$$

Retransformando se obtiene $f(x)$.

Como ilustración de situaciones físicas que involucran ecuaciones integrales revisaremos el problema de la *tautócrona*: una partícula de masa m resbala, sin roce, sobre una curva bajo el efecto de la gravedad. Queremos la forma de la curva de modo que el tiempo que se demore la partícula en "llegar abajo" sea independiente del punto de lanzamiento.



Debido a la conservación de la energía se satisface para todo y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= mg(y_0 - y) \\ v &= \sqrt{2g}\sqrt{y_0 - y}\ , \end{aligned}$$

donde y_0 es la altura inicial. Podemos evaluar el tiempo de descenso

$$\int \frac{ds}{v} = \int_{y_0}^{0} \frac{1}{v}\frac{ds}{dy}\,dy = -\int_0^{y_0} f(y)(y_0 - y)^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2g}}\,dy\ ,$$

donde hemos definido $f(y) = ds/dy$. Con este resultado podemos escribir la condición de que la curva sea tautócrona de la siguiente manera:

$$\int_0^{y_0} f(y)(y_0 - y)^{-1/2}\,dy = C_0, \qquad \text{constante independiente de } y_0.$$

Esta ecuación integral es de la forma (10.1), con $\lambda = 0$, $g(x) = C_0$ y $K(x) = x^{-1/2}$, por tanto tiene solución de la forma (10.2):

$$\mathcal{L}\left\{f(x), s\right\} = \frac{C_0/s}{\mathcal{L}\left\{x^{-1/2}, s\right\}}\ .$$

Sabemos que

$$\mathcal{L}\left\{x^{-1/2}, s\right\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}}\ ,$$

luego

$$\mathcal{L}\left\{f(x), s\right\} = \frac{C_0}{s}\frac{\sqrt{s}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{C_0}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{1}{\sqrt{s}}\ .$$

Retransformando,

$$f(y) = \frac{ds}{dy} = \frac{C_0}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}y^{-1/2} = Cy^{-1/2}\ .$$

A partir de

$$ds^2 = dx^2 + dy^2\ ,$$

despejamos

$$\begin{aligned} dx &= \sqrt{ds^2 - dy^2} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}dy\right)^2 - dy^2}\ , \\ dx &= \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 dy^2 - dy^2} = \left[\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1\right]^{1/2} dy\ . \end{aligned}$$

Como conocemos ds/dy, tenemos

$$dx = \left[\frac{C^2}{y} - 1\right]^{1/2} dy \ . \tag{10.3}$$

Haciendo el cambio de variable

$$y = C^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{C^2}{2}\left[1 - \cos(\phi)\right] \ .$$

Diferenciando,

$$dy = \frac{C^2}{2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \ .$$

Reemplazando en (10.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
dx &= \left[\csc^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - 1\right]^{1/2} \frac{C^2}{2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \\
dx &= \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) \frac{C^2}{2} 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \, d\phi \\
dx &= C^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \, d\phi = \frac{C^2}{2}(1 + \cos\phi) \, d\phi \ .
\end{aligned}$$

Integrando esta última ecuación y agregando el cambio de variable podemos expresar la curva resultante en forma paramétrica:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{C^2}{2}(\phi + \operatorname{sen}\phi) \\
y &= \frac{C^2}{2}(1 - \cos\phi) \ .
\end{aligned}$$

Esta es la ecuación de una cicloide.

10.3 Ecuaciones en derivadas parciales

Consideremos la ecuación unidimensional de conducción del calor

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \ , \tag{10.4}$$

donde $u(x,t)$ corresponde a la temperatura en la posición x y a tiempo t. Elegimos, por simplicidad, la constante $c^2 = K/\sigma\rho = 1$, donde K es la conductividad térmica, σ el calor específico y ρ la densidad.

El problema específico a abordar es el de una varilla seminfinita con condición inicial $u(x,0) = 0$, $\forall\, x > 0$, y condiciones de borde $u(0,t) = A$ y $u(\infty,t) = 0$.

Si tomamos la transformada de Laplace respecto de x en (10.4), encontramos que la transformada de u debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$s^2\mathcal{L}\left\{u(x,t),s\right\} - su(0,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t},s\right\} \ .$$

La anterior ecuación resulta no ser de coeficientes constantes, además, es inhomogénea y uno de sus términos, $\partial u/\partial x(0,t)$ no lo conocemos, así que la solución no es directa. Pero si tomamos la transformada de Laplace respecto a t de la ecuación de conducción, y definiendo

$$U(x,s) = \mathcal{L}\left\{u(x,t),s\right\} = \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\,dt \ ,$$

obtenemos

$$\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} = s\,U(x,s) - u(x,0) \ .$$

Utilizando la condición inicial $u(x,0)=0$, nos queda una ecuación diferencial en donde s es un parámetro,

$$\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - s\,U(x,s) = 0 \ ,$$

con solución

$$U(x,s) = C_1 e^{x\sqrt{s}} + C_2 e^{-x\sqrt{s}} \ .$$

Aplicamos la transformada de Laplace sobre las condiciones de borde:

$$\mathcal{L}\left\{u(\infty,t),s\right\} = U(\infty,s) = 0 \Longrightarrow C_1 = 0 \ ,$$
$$\mathcal{L}\left\{u(0,t),s\right\} = U(0,s) = \mathcal{L}\left\{A,s\right\} = \frac{A}{s} \Longrightarrow C_2 = \frac{A}{s} \ .$$

La solución es

$$U(x,s) = \frac{A}{s}e^{-x\sqrt{s}} \ , \qquad \text{para } \mathrm{Re}[s] > 0.$$

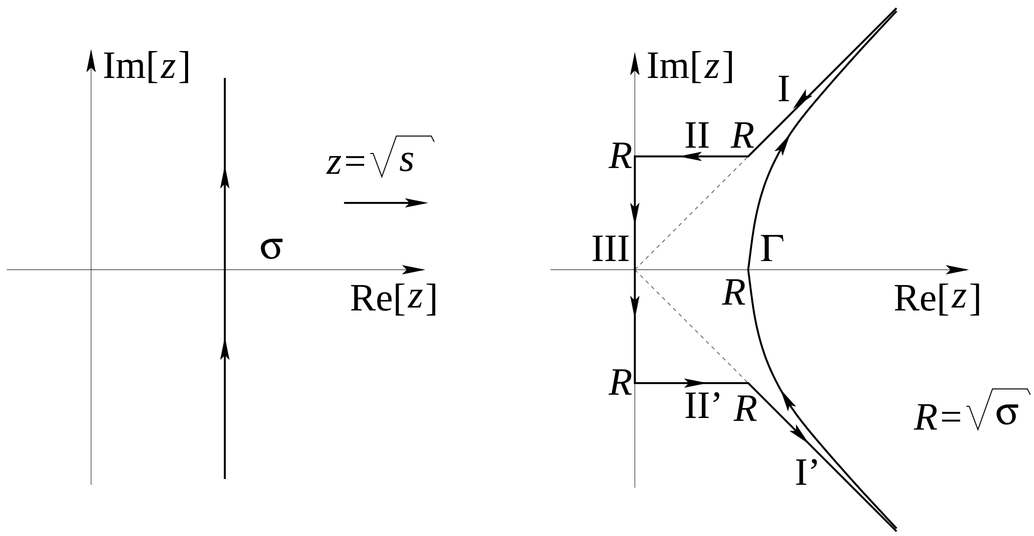
Retransformando,

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}e^{-x\sqrt{s}},t\right\} = A\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-x\sqrt{s}},t'\right\}\,dt' \ .$$

Evaluamos, primero,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-x\sqrt{s}},t\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}e^{-x\sqrt{s}}\,ds \ .$$

Usando el cambio de variable $z=\sqrt{s}$, el camino de integración se modifica como muestra la figura:



y la integral nos queda

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-x\sqrt{s}},t\right\} = \frac{2}{2\pi i}\int_\Gamma e^{z^2t}e^{-zx}z\,dz\ .$$

Analicemos la integral sobre los tramos que cierran el camino, partiendo por el tramo I:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\left|\int_{\mathrm{I}} ze^{z^2t-zx}\,dz\right|_{z=(1+i)y} &= \frac{1}{\pi}\left|\int_R^\infty (1+i)^2ye^{(1+i)^2y^2t-(1+i)yx}\,dy\right| \\ &\leq \frac{2}{\pi}\int_R^\infty ye^{-yx}\,dy \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\ .\end{aligned}$$

El tramo II:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\left|\int_{\mathrm{II}} ze^{z^2t-zx}\,dz\right|_{z=iR+y} &= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^R (iR+y)e^{(iR+y)^2t-(iR+y)x}\,dy\right| \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^R |\,iR+y\,|\,e^{(y^2-R^2)t-yx}\,dy \\ &< \frac{e^{-R^2t}}{\pi}\sqrt{2}R\int_0^R e^{y^2t-yx}\,dy \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\int_0^R e^{y^2t-yx}\,dy}{e^{R^2t}/R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\ .\end{aligned}$$

Notamos que dentro del circuito no hay polos, entonces al utilizar el teorema del residuo podemos concluir que la integral sobre el circuito cerrado es nula. Ya hemos demostrado que las integrales sobre los tramos I y II tienden a cero cuando $R\to\infty$. En forma equivalente se puede mostrar que se anularán, en el mismo límite, las integrales sobre los tramos I' y II'. Por lo tanto, la integral sobre el camino Γ más la integral sobre el tramo III deben cancelarse en el límite $R\to\infty$, o lo que es lo mismo, la integral sobre el camino Γ, que es la que nos interesa, es igual a menos la integral sobre el tramo III. Parametrizamos por $z=iy$, y nos queda

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-x\sqrt{s}}, t\right\} = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathrm{III}} e^{z^2 t - zx} z\, dz = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 t - iyx} y\, dy = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}} e^{-x^2/4t} \ .$$

Podemos escribir la solución

$$u(x,t) = A\int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{t'^{3/2}} e^{-x^2/4t'}\, dt' \ .$$

Hacemos el cambio de variable $\alpha^2 = x^2/4t'$, lo que implica $dt' = -x^2/2\alpha^3 d\alpha$, y obtenemos finalmente

$$u(x,t) = \frac{2A}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = A\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right] \ .$$

10.4 Sistema de ecuaciones lineales

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} y_1' + 2y_2' + y_1 - y_2 &= 25 \\ 2y_1' + y_2 &= 25e^t \ , \end{aligned}$$

con condiciones iniciales $y_1(0) = 0$ e $y_2(0) = 25$. Apliquemos la transformada de Laplace, con las definiciones

$$Y_{1,2} = \mathcal{L}\left\{y_{1,2}(t), s\right\} \ .$$

Obtenemos para el sistema:

$$\begin{aligned} sY_1 - y_1(0) + 2sY_2 - 2y_2(0) + Y_1 - Y_2 &= \frac{25}{s} \ , \\ 2sY_1 - 2y_1(0) + Y_2 &= \frac{25}{s-1} \ . \end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} sY_1 + 2sY_2 - 50 + Y_1 - Y_2 &= \frac{25}{s} \ , \\ 2sY_1 + Y_2 &= \frac{25}{s-1} \ . \end{aligned}$$

Despejando,

$$Y_1(s) = \frac{25}{4s(s-1)^2(s+1/4)} = \frac{25}{s} - \frac{9}{s-1} + \frac{5}{(s-1)^2} - \frac{16}{(s+1/4)} \ .$$

Retransformando,

$$y_1(t) = 25 - 9e^t + 5te^t - 16e^{-t/4} \ .$$

Análogamente

$$y_2(t) = 33e^t - 10te^t - 8e^{-t/4} \ .$$