Capítulo 12

Polinomios de Hermite

12.1 Definición

Definimos los polinomios de Hermite por:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} \ . \tag{12.1}$$

$\{H_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ son polinomios de grado n. Se tiene que:

$$H_n(-t) = (-1)^n H_n(t) \ , \tag{12.2}$$

es decir, H_n es par si n es par, e impar si n es impar.

Los primeros polinomios de Hermite son:

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 \\ H_1(t) &= 2t \\ H_2(t) &= 4t^2 - 2 \\ H_3(t) &= 8t^3 - 12t \\ H_4(t) &= 16t^4 - 48t^2 + 12 \end{aligned}$$

12.2 Función generatriz

Consideremos la función

$$\psi(t,x) = e^{t^2} e^{-(t-x)^2} = e^{2tx - x^2} \ . \tag{12.3}$$

Su desarrollo en serie de Taylor será:

$$\psi(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(t)}{n!} x^n \ , \qquad A_n(t) = \left. \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \right|_{x=0} \ .$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial (t-x)} (-1) \ ,$$

se tiene

$$A_n(t) = e^{t^2} \frac{\partial^n}{\partial(t-x)^n} e^{(t-x)^2}\bigg|_{x=0} (-1)^n = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} = H_n(t) \ ,$$

luego

$$e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n \ . \tag{12.4}$$

Se dice que e^{2tx-x^2} es la *función generatriz* de los polinomios de Hermite, vale decir, es aquella función de dos variables tal que su desarrollo de Taylor en una de las variables tiene como coeficientes precisamente los polinomios de Hermite.

A partir de (12.4) se pueden encontrar relaciones entre los polinomios de Hermite. La estrategia para hallarlas (para ésta o cualquier otra función generatriz de otros polinomios) es típica: derivar parcialmente respecto a alguna de las variables y luego comparar potencias de x en los desarrollos en Taylor resultantes.

1) Derivando respecto a t:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 2x\psi \ .$$

Usando (12.4):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d}{dt} H_n(t) \right] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} 2x^{n+1} \ .$$

Reordenando la suma en el lado izquierdo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_n(t)}{n!} x^{n+1} = H_0'(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_{m+1}'(t)}{(m+1)!} x^{m+1} \ .$$

Comparando los coeficientes de las potencias de x en cada serie encontramos:

$$\begin{aligned} H_0'(t) &= 0 \ , \\ 2H_n(t) &= \frac{1}{n+1} H_{n+1}'(t) \ , \end{aligned}$$

lo cual puede ser reescrito en la forma

$$2nH_{n-1}(t) = H_n'(t) \ , \qquad n \geq 0 \ . \tag{12.5}$$

Observemos que, si bien sólo tiene sentido considerar polinomios de Hermite con índice positivo, la expresión (12.5) puede ser extendida a $n = 0$, aunque ello haga aparecer un factor H_{-1}. En general, las relaciones de recurrencia que obtendremos pueden considerarse válidas para cualquier índice entero, adoptando la convención de que los polinomios con subíndices negativos tienen algún valor adecuado, por ejemplo, cero.

La relación (12.5) expresa un polinomio de Hermite en términos de un operador (en este caso la derivada) aplicado sobre el polinomio de Hermite inmediatamente superior. Un operador que tiene tal propiedad se denomina *operador de bajada*. En este caso, el operador de bajada de los polinomios de Hermite es $(2n)^{-1}d_t$.

2) Derivando respecto a x:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = (2t - 2x)\psi \ .$$

Con (12.4):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(t)}{(n-1)!}x^{n-1} &= 2t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!}x^{n+1} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(t)}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2tH_n(t)}{n!}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2H_{n-1}(t)}{(n-1)!}x^n
\end{aligned}$$

Comparando potencias de x:

$$\begin{aligned}
H_1(t) &= 2tH_0(t) \ , \\
H_{n+1}(t) &= 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t) \ , \qquad n \geq 1 \ .
\end{aligned}$$

O bien

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t) \ , \qquad n \geq 0 \ . \tag{12.6}$$

3) Podemos utilizar las dos relaciones de recurrencia (12.5) y (12.6) para obtener una tercera:

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H_n'(t) \ . \tag{12.7}$$

Hemos pues encontrado el *operador de subida* para los polinomios de Hermite, a saber, $2t - d_t$.

Derivando (12.7):

$$H_{n+1}' = 2H_n + 2tH_n' - H_n'' \ .$$

Con (12.5),

$$2(n+1)H_n = 2H_n + 2tH_n' - H_n'' \ ,$$

o sea,

$$H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 0 \ .$$

Es decir, los polinomios H_n son una solución de la *ecuación de Hermite*:

$$y''(t) - 2ty'(t) + 2ny(t) = 0 \ . \tag{12.8}$$

12.3 Ortogonalidad

Evaluemos

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)H_n(t)e^{-t^2}\,dt\ .$$

Sin pérdida de generalidad, sea $n\geq m$. Podemos escribir

$$I=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)\frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n}\ .$$

Integrando por partes:

$$I=(-1)^{n+1}2m\int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e^{-t^2}\,dt\ .$$

Integrando por partes n veces:

$$I=(-1)^m(-1)^n 2^n m!\int_{-\infty}^{\infty} H_0(t)\frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}}e^{-t^2}\,dt\ .$$

Si $m<n$, entonces

$$I=(-1)^{n+m}2^n m!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}}e^{-t^2}\,dt=(-1)^{n+m}2^n m!\frac{d^{n-m-1}}{dt^{n-m-1}}e^{-t^2}\bigg|_{-\infty}^{\infty}=0\ .$$

Si $n=m$,

$$I=2^n m!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt=2^n m!\sqrt{\pi}\ .$$

Resumiendo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)H_n(t)e^{-t^2}\,dt=2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm}\ . \tag{12.9}$$

Podemos expresar este resultado diciendo que los polinomios de Hermite son ortogonales, pero con una *función de peso* $p(t)=e^{-t^2}$.

Si definimos las funciones

$$\varphi_n(t)=\frac{H_n(t)e^{-t^2/2}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\ , \tag{12.10}$$

es claro que $\{\varphi_n\}_n$ es un conjunto ortonormal:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(t)\varphi_m(t)\,dt=\delta_{nm}\ . \tag{12.11}$$

12.4 Algunos resultados interesantes

(a) Es fácil demostrar que las funciones φ_n definidas en (12.10) satisfacen la ecuación diferencial

$$y'' - t^2 y = -(2n+1)y \tag{12.12}$$

[con la condición de borde $y(\pm\infty) = 0$], que es precisamente la *ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico.*

(b) Sea $\Phi_n(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi_n(t), \omega\}$. Dado que se cumple

$$\varphi_n'' + (2n+1-t^2)\varphi_n = 0 \ ,$$

se puede demostrar que $\Phi_n(\omega)$ satisface

$$\Phi_n''(\omega) + (2n+1-\omega^2)\Phi_n(\omega) = 0 \ , \tag{12.13}$$

es decir, la misma ecuación diferencial que $\varphi_n(t)$. En otras palabras, la transformada de Fourier de $\varphi_n(t)$ es esencialmente ella misma.

12.5 Solución por serie de la ecuación de Hermite

Consideremos la ecuación de Hermite (12.8), pero generalicémosla ligeramente:

$$y'' - 2ty' + 2\beta y = 0 \ . \tag{12.14}$$

Busquemos soluciones con un cierto desarrollo de Taylor:

$$y(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu \ . \tag{12.15}$$

Reemplazando en (12.14):

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [a_{\nu+2}(\nu+2)(\nu+1) - 2a_\nu \nu + 2\beta a_\nu] t^\nu = 0 \ ,$$

$$2\beta a_\nu - 2\nu a_\nu + a_{\nu+2}(\nu+1)(\nu+2) = 0 \ , \quad \nu \geq 0 \ ,$$

es decir, obtenemos una relación de recurrencia para los coeficientes de la serie:

$$a_{\nu+2} = \frac{2(\nu-\beta)}{(\nu+1)(\nu+2)} a_\nu \ . \tag{12.16}$$

Se desprenden las siguientes consecuencias:

a) Hay dos series independientes, la de coeficientes con índice par, que depende sólo de a_0, y la de coeficientes con índice impar, que depende sólo de a_1. Por tanto, hay dos coeficientes arbitrarios, a_0 y a_1, y por ende dos soluciones linealmente independientes.

b)

$$\frac{a_{\nu+2}}{a_\nu} = \frac{2(\nu-\beta)}{(\nu+1)(\nu+2)} \simeq \frac{2}{\nu} \qquad \text{si } \nu \gg 1,$$

lo cual significa que el radio de convergencia de la serie es infinito. Vale decir, las soluciones no tienen singularidades en el plano.

c) La ecuación tiene por solución un polinomio sólo si $\beta \in \mathbb{N}^*$. Si β es par, hay que tomar $a_0 \neq 0$ y $a_1 = 0$. Si β es impar, hay que tomar $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$.

d) Si $\beta \notin \mathbb{N}^*$, y si la solución es par o impar, entonces $(\nu-\beta)/[(\nu+1)(\nu+2)] > 0$ desde cierto ν_0 en adelante, de modo que los a_ν tienen todos el mismo signo para $\nu > \nu_0$. Esto es, la serie tiene un crecimiento rápido cuando $t \to \infty$.

Observación

Una gran cantidad de problemas físicos están descritos por ecuaciones diferenciales en las que interviene un operador Laplaciano (la ecuación de Laplace, la ecuación de onda, la ecuación de Schrödinger, etc.). Matemáticamente, estas ecuaciones corresponden a casos particulares del *problema de Sturm-Liouville*, vale decir, ecuaciones de autovalores para un un operador diferencial autoadjunto. No entraremos en los detalles de esta discusión. Sólo diremos que los polinomios de Hermite son un caso particular de soluciones a un problema de Sturm-Liouville. Dichas soluciones forman un conjunto completo y ortogonal, con cierta función de peso. En el caso de familias de polinomios ortogonales, existen relaciones de recurrencia que vinculan cada polinomio con los de grados inmediatamente anterior y posterior, y típicamente poseen una función generatriz, así como operadores de subida y de bajada. En los capítulos siguientes encontraremos nuevas familias de polinomios ortogonales. Todos ellos provienen de sendos problemas de Sturm-Liouville, y por tanto no será extraño encontrar las mismas características que hemos identificado en los polinomios de Hermite.