Capítulo 13

Polinomios de Laguerre

13.1 Definición

Definición 13.1 *Definimos el conjunto de los polinomios de Laguerre* $\{L_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ *mediante una cualquiera de las siguientes ecuaciones:*

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}\left(t^n\, e^{-t}\right) = (-1)^n t^n + \cdots + n!\ , \tag{13.1a}$$

$$L_n(t) = e^t \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left(\frac{d^{n-\nu} t^n}{dt^{n-\nu}}\right) \frac{d^\nu e^{-t}}{dt^\nu}\ , \tag{13.1b}$$

$$L_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{n!}{\nu!}\, t^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{n!\; n!}{(n-\nu)!\; (\nu!)^2}\, t^\nu\ . \tag{13.1c}$$

Algunos de los polinomios en forma explícita:

$$\begin{aligned}
L_0(t) &= 1 \\
L_1(t) &= -t + 1 \\
L_2(t) &= t^2 - 4t + 2 \\
L_3(t) &= -t^3 + 9t^2 - 18t + 6 \\
L_4(t) &= t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

13.2 Función generatriz

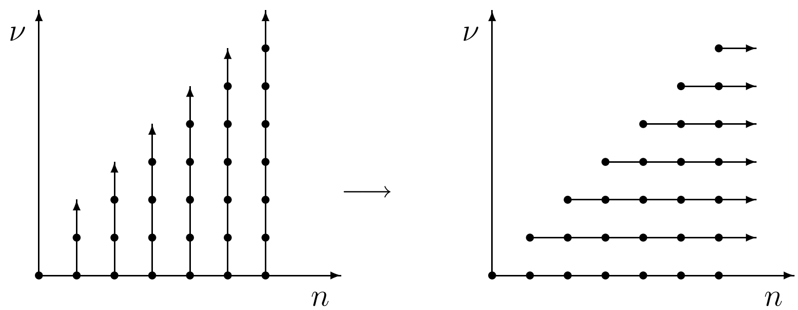
Definición 13.2 *La función generatriz* $\Psi(t,x)$ *está definida por la siguiente relación:*

$$\Psi(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!}\, x^n\ . \tag{13.2}$$

Usando (13.1c) obtenemos:

$$\Psi(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \binom{n}{\nu} t^\nu x^n$$

Cambiemos el orden de suma. El primer gráfico corresponde a la forma en que estabamos sumando fijamos un n en el eje horizontal con $n = 1, \cdots, \infty$ y luego consideramos los v variando desde 1 a n, flechas verticales hacia arriba. El segundo corresponde a la misma suma pero hecha de forma diferente fijamos un ν en el eje vertical con $\nu = 1, \cdots, \infty$ y luego consideramos los n variando desde ν a ∞, flechas horizontales hacia la derecha.



Obtenemos

$$\Psi(t,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\, t^\nu \binom{n}{\nu}\, x^n\ .$$

Haciendo el cambio de índice $m = n - \nu$:

$$\Psi(t,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\, t^\nu \binom{m+\nu}{\nu}\, x^{m+\nu}\ .$$

Reordenando

$$\Psi(t,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\, t^\nu x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+\nu}{\nu}\, x^m\ .$$

Pero

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+\nu}{\nu}\, x^m = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\nu+1} \qquad \text{cuando } |\,x\,| < 1\ ,$$

luego

$$\Psi(t,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\, t^\nu \left(\frac{x}{1-x}\right)^\nu \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \left(\frac{tx}{1-x}\right)^\nu\ .$$

Finalmente

$$\boxed{\Psi(t,x) = \frac{1}{1-x}\exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!}\, x^n} \tag{13.3}$$

13.3 Relaciones de recurrencia

Reescribamos la definición de la función generatriz

$$\exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = (1-x)\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{n!}\,x^n\ . \tag{13.4}$$

Derivemos respecto a x:

$$\frac{-t}{(1-x)^2}\exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(t)}{(n-1)!}\,x^{(n-1)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{n!}\,x^n\ .$$

Usando (13.4) y comparando coeficientes de x,

$$\boxed{L_{n+1}(t) + (t-2n-1)L_n(t) + n^2 L_{n-1}(t) = 0} \tag{13.5}$$

De la misma manera, derivando (13.4) respecto a t, se obtiene

$$\boxed{L_n'(t) - n\,L_{n-1}'(t) + n\,L_{n-1}(t) = 0} \qquad n \geq 1\ . \tag{13.6}$$

13.4 Ecuación de Laguerre

Diferenciando dos veces (13.4) respecto a t,

$$L_{n+2}''(t) + (t-2n-3)L_{n+1}''(t) + (n+1)^2 L_n''(t) + 2L_{n+1}'(t) = 0\ . \tag{13.7}$$

De (13.6) tenemos

$$L_{n+1}'(t) = (n+1)\left[L_n'(t) - L_n(t)\right]\ , \tag{13.8}$$

de donde obtenemos, derivando nuevamente,

$$L_{n+1}''(t) = (n+1)\left[L_n''(t) - L_n'(t)\right]\ . \tag{13.9}$$

Cambiando $n \to n+1$,

$$L_{n+2}''(t) = (n+2)\left[L_{n+1}''(t) - L_{n+1}'(t)\right]\ .$$

Usando (13.8) y (13.9),

$$\begin{aligned} L_{n+2}''(t) &= (n+2)(n+1)\left[L_n''(t) - L_n'(t) - L_n'(t) + L_n(t)\right]\ , \\ L_{n+2}''(t) &= (n+2)(n+1)\left[L_n''(t) - 2L_n'(t) + L_n(t)\right]\ . \end{aligned} \tag{13.10}$$

Reemplazando (13.8), (13.9) y (13.10) en (13.7),

$$\begin{gathered} (n+2)(n+1)\left[L_n''(t) - 2L_n'(t) + L_n(t)\right] + (t-2n-3)(n+1)\left[L_n''(t) - L_n'(t)\right] \\ +(n+1)^2 L_n''(t) + 2(n+1)\left[L_n'(t) - L_n(t)\right] = 0 \\ (n+1)\,(n+2+t-2n-3+n+1)\,L_n''(t) + (n+1)\,(2n-4-t+2n+3+2)\,L_n'(t) \\ +(n+1)\,(n+2-2)\,L_n(t) = 0 \\ (n+1)\,t\,L_n''(t) + (n+1)\,(1-t)\ \,L_n'(t) + (n+1)n\,L_n(t) = 0\ . \end{gathered}$$

Dividiendo por $(n+1)$ obtenemos

$$\boxed{t\, L_n''(t) + (1-t)\, L_n'(t) + n\, L_n(t) = 0} \tag{13.11}$$

Es decir, $L_n(t)$ es una solución de la *ecuación de Laguerre*

$$\boxed{t\, y''(t) + (1-t)\, y'(t) + n\, y(t) = 0\ .} \tag{13.12}$$

Consideremos esta ecuación, pero en una forma más general:

$$t\, y''(t) + (1-t)\, y'(t) + \lambda\, y(t) = 0\ .$$

Buscando soluciones del tipo

$$y(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu\ ,$$

es fácil demostrar que los a_ν satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{\nu+1} = \frac{\nu - \lambda}{(\nu+1)^2} a_\nu\ .$$

Lo anterior tiene varias consecuencias:

(i) El coeficiente a_0 puede elegirse libremente, quedando a_1, $a_2, \ldots$ así determinados por a_0. Se obtiene un espacio de soluciones de dimensión uno. Para encontrar la otra solución linealmente independiente hay que analizar ecuaciones del tipo

$$f'' + p(z)f' + q(z)f = 0\ .$$

Esto se hará en el capítulo siguiente.

(ii) Al hacer el cuociente entre los coeficientes tenemos

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{1}{\nu}\ .$$

Esto implica radio de convergencia infinito para la serie.

(iii) Los valores $\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots$ son excepcionales: dan soluciones polinomiales.

(iv) Si $\lambda \notin \mathbb{N}^0$ todos los coeficientes de índice suficientemente grande son positivos o negativos. Esto implica un crecimiento muy rápido.

13.5 Ortogonalidad

Consideremos

$$I = \int_0^\infty t^m \, L_n(t) \, e^{-t} \, dt \; , \qquad \text{con } m < n \; .$$

Sea $m > 0$, entonces

$$I = \int_0^\infty t^m \, \frac{d^n}{dt^n} \left(t^n \, e^{-t} \right) \, dt \; ,$$

integrando por partes,

$$t^m \, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(t^n \, e^{-t} \right) \Big|_0^\infty - m \int_0^\infty t^{m-1} \, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(t^n \, e^{-t} \right) \, dt \; .$$

Integrando n veces por partes se obtiene entonces

$$I = (-1)^n \, m! \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} \left(t^n \, e^{-t} \right) \, dt \; .$$

Si $m < n$,

$$I = (-1)^n \, m! \frac{d^{n-m-1}}{dt^{n-m-1}} \left(t^n \, e^{-t} \right) \Big|_0^\infty = 0 \; ,$$

luego

$$\int_0^\infty L_n(t) \, L_m(t) \, e^{-t} \, dt = 0 \qquad \text{si } m < n \; .$$

Por simetría la integral va a ser nula siempre que $m \neq n$.
Si $m = n$,

$$\int_0^\infty L_n^2(t) \, e^{-t} \, dt = (-1)^n (-1)^n n! \int_0^\infty t^n \, e^{-t} \, dt = (n!)^2 \; .$$

Resumiendo ambos casos,

$$\boxed{\int_0^\infty L_n(t) \, L_m(t) \, e^{-t} \, dt = (n!)^2 \, \delta_{nm}} \tag{13.13}$$

Basados en la relación de ortogonalidad (13.13) podemos definir un conjunto de funciones

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n!} \, L_n(t) \, e^{-t/2} \; . \tag{13.14}$$

Claramente

$$\int_0^\infty \varphi_n(t) \, \varphi_m(t) \, dt = \delta_{nm} \; .$$

Es decir, el conjunto $\{\varphi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ corresponde a un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $[\,0,\infty\,)$.

A partir de (13.14) podemos despejar los polinomios de Laguerre

$$L_n(t) = n!\; e^{t/2}\varphi_n(t) \;,$$

y usando la ecuación diferencial (13.11) que satisfacen, encontramos la ecuación para las funciones $\varphi_n(t)$:

$$t\;\varphi_n''(t) + \;\varphi_n'(t) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)\varphi_n(t) = 0 \;. \tag{13.15}$$

Además, $\varphi_n(t)$ satisface

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_n(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0}\varphi_n(t) < \infty \;.$$

13.6 Polinomios asociados de Laguerre

Al diferenciar m veces la ecuación (13.11) obtenemos

$$t\;L_n^{(m+2)}(t) + (m+1-t)\;L_n^{(m+1)}(t) + (n-m)\;L_n^{(m)}(t) = 0 \;.$$

Podemos definir un nuevo conjunto de polinomios

$$\boxed{L_n^m(t) = \frac{d^m}{dt^m}\;L_n(t)} \qquad \text{para } n \geq m \;, \tag{13.16}$$

conocidos como los *polinomios asociados de Laguerre*. Los cuales son soluciones de la siguiente ecuación diferencial:

$$\boxed{t\;y''(t) + (m+1-t)\;y'(t) + (n-m)\;y(t) = 0 \;.} \tag{13.17}$$

Algunos de los primeros polinomios son:

$$\begin{array}{lll} L_1^1 = -1 \;, & & \\ L_2^1 = -4 + 2t \;, & L_2^2 = 2 \;, & \\ L_3^1 = -18 + 18t - 3t^2 \;, & L_3^2 = 18 - 6t \;, & L_3^3 = -6 \;. \end{array}$$

La función generatriz

$$\boxed{\Psi_m(t,x) = (-1)^m x^m\;\exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = (1-x)^{m+1}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{L_n^m(t)}{n!}\;x^n \;.} \tag{13.18}$$

Utilizando esta ecuación podemos obtener las relaciones de recurrencia

$$\frac{d}{dt}\;L_n^m(t) \;=\; L_n^{m+1}(t) \;, \tag{13.19}$$

$$L_{n+1}^m(t) + (t-2n-1)L_n^m(t) + m\;L_n^{m+1}(t) + n^2 L_{n-1}^m(t) \;=\; 0 \;, \tag{13.20}$$

$$L_n^m(t) - n\;L_{n-1}^m(t) + n\;L_{n-1}^{m-1}(t) \;=\; 0 \;. \tag{13.21}$$

Finalmente, en forma análoga a lo que hicimos con los polinomios de Laguerre podemos definir las funciones ortogonales a partir de los polinomios asociados de Laguerre de la siguiente forma:

$$R_{n\,\ell}(t) \equiv e^{-t/2}\, t^{\ell}\, L_{n+\ell}^{2\ell+1}(t)\ . \tag{13.22}$$

Estas funciones satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2}{t}\,\frac{dy(t)}{dt} - \left(\frac{1}{4} - \frac{n}{t} + \frac{\ell(\ell+1)}{t^2}\right) y(t) = 0\ . \tag{13.23}$$

Esta ecuación aparece en Mecánica Cuántica al resolver el átomo de Hidrógeno. Especificamente, corresponde a la ecuación radial de Schrödinger para la función de onda del átomo de Hidrógeno.