Capítulo 14

Ecuaciones diferenciales del tipo $f'' + p(z)f' + q(z)f = 0$

14.1 Soluciones en puntos regulares

Consideremos la ecuación diferencial

$$f''(z) + p(z)f'(z) + q(z)f(z) = 0 \ . \tag{14.1}$$

Sea D una región en el plano complejo. Sean $p(z)$ y $q(z)$ holomorfas en D. Sea $z_0 \in D$. En este caso se puede eliminar el término en f' en (14.1). Para ello consideramos

$$f(z) = g(z)e^{-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} p(z')\,dz'} \equiv g(z)E \ . \tag{14.2}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} E' &= -\frac{1}{2}pE \ , \\ E'' &= \left(-\frac{p'}{2} + \frac{p^2}{4}\right) E \ , \end{aligned}$$

(14.1) se puede reescribir:

$$f'' + pf' + qf = E\left(g'' + qg - \frac{p^2 g}{4} - \frac{p' g}{2}\right) = 0 \ ,$$

es decir

$$g''(z) + A(z)g(z) = 0 \ , \tag{14.3}$$

con

$$A(z) = q(z) - \frac{p(z)^2}{4} - \frac{p'(z)}{2} \ . \tag{14.4}$$

$A(z)$ será analítica y univalente en D si p y q lo son. Supongamos entonces que esto se satisface. Sea el origen $0 \in D$. Entonces, en torno a $z = 0$:

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \ , \tag{14.5}$$

serie que tiene un cierto radio de convergencia r.

Planteamos para $g(z)$ una solución de forma análoga:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \ . \tag{14.6}$$

Reordenando las series:

$$A(z)g(z) = \sum_{lk}^{\infty} a_l c_k z^{l+k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu c_{\nu-\mu} z^\nu \ .$$

(14.3) queda entonces

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left[c_{\nu+2}(\nu+1)(\nu+2) + \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu c_{\nu-\mu} \right] z^\nu = 0 \ ,$$

hallando la fórmula recursiva:

$$c_{\nu+2} = -\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu c_{\nu-\mu} \ . \tag{14.7}$$

Es claro entonces que podemos elegir arbitraria e independientemente dos coeficientes, c_0 y c_1.

Sea $0 < \rho < r$. Como $\sum_{\mu=0}^{\infty} |\, a_\mu \,| \, \rho^\mu$ converge, entonces existe un $M > 0$ tal que

$$|\, a_\mu \,| \, \rho^\mu < M \ . \tag{14.8}$$

Sea

$$N(k) = \max\{|\, c_0 \,|, |\, c_1 \,| \, \rho, \ldots, |\, c_k \,| \, \rho^k\} \ , \tag{14.9}$$

es decir,

$$|\, c_\mu \,| \leq \frac{N(k)}{\rho^\mu} \ , \qquad \mu = 0, 1, \ldots, k \ .$$

Usando la relación de recurrencia (14.7):

$$c_{k+1} = -\frac{1}{k(k+1)} \sum_{\mu=0}^{k-1} c_\mu a_{k-1-\mu} \ ,$$

luego

$$
\begin{aligned}
|\, c_{k+1} \,| &< \frac{1}{k(k+1)} \sum_{\mu=0}^{k-1} \frac{N(k)}{\rho^{\mu}} \frac{M}{\rho^{k-1-\mu}} = \frac{1}{k(k+1)} \frac{N(k)}{\rho^{k-1}} Mk \\
&< \frac{1}{\rho^{k+1}} \frac{N(k)\rho^2 M}{(k+1)}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
|\, c_{k+1} \,|\, \rho^{k+1} < \frac{M\rho^2}{(k+1)} N(k) < N(k) \qquad \forall k \text{ suficientemente grande.}
$$

Por tanto, desde cierto k_0 en adelante,

$$
N(k) = N(k+1) = N(k+2) = \cdots = N \ ,
$$

o sea

$$
|\, c_k \,|\, \rho^k \leq N \ , \qquad k \geq k_0 \ .
$$

Con ello,

$$
\left| \sum_{k=k_0}^{\infty} c_k z^k \right| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |\, c_k \,|\, |\, z \,|^k = \sum_{k=k_0}^{\infty} |\, c_k \,|\, \rho^k \left(\frac{|\, z \,|}{\rho} \right)^k \leq N \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{|\, z \,|}{\rho} \right)^k \ .
$$

La última suma converge si $|\, z \,| < \rho < r$, luego $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ converge si $|\, z \,| < r$. Este resultado sugiere el siguiente teorema.

Teorema 14.1 (Sin demostración) Toda solución de $f'' + p(z) f' + q(z) f = 0$ es analítica por lo menos allí donde los coeficientes $p(z)$ y $q(z)$ lo son.

Definición 14.1 *Dos funciones univalentes en D son linealmente dependientes (l.d.) si una es múltiplo de la otra en D, i.e.*

$$
\psi_1 = \lambda \psi_2 \ .
$$

Se dice que son linealmente independientes (l.i.) en D si en D ninguna es múltiplo de la otra.

Teorema 14.2 (Sin demostración) En un dominio D simplemente conexo, donde $p(z)$ y $q(z)$ son holomorfas, las soluciones forman un espacio de dimensión dos.

Definición 14.2 *El Wronskiano de dos soluciones de la ecuación* (14.1) *es*

$$
W(z) = W[\psi_1(z), \psi_2(z)] = \begin{vmatrix} \psi_1(z) & \psi_2(z) \\ \psi_1'(z) & \psi_2'(z) \end{vmatrix} \ . \tag{14.10}
$$

Evaluemos W':

$$\begin{aligned} W &= \psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1' \\ W' &= \psi_1\psi_2'' - \psi_2\psi_1'' = \psi_1(-p\psi_2' - q\psi_2) - \psi_2(-p\psi_1' - q\psi_1) \\ &= -p\psi_1\psi_2' + p\psi_2\psi_1' = -p(\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1') = -pW \ , \end{aligned}$$

$$\frac{W'}{W} = (\ln W)' = -p \ , \tag{14.11}$$

luego

$$W(z) = Ce^{-\int_{z_0}^{z} p(z')\,dz'} \ . \tag{14.12}$$

Observemos que si $W(z_0) \neq 0$, $W(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$.

Proposición 14.1 Sean $p(z)$ y $q(z)$ holomorfas en D y univalentes. Entonces

a) $W(z) = 0 \quad \forall z \in D \Longleftrightarrow \psi_1(z), \psi_2(z)$ son l.d. en D.

b) $\psi_1(z), \psi_2(z)$ son l.i. en $D \Longleftrightarrow W(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$.

Ejemplo Consideremos la ecuación

$$f'' - \frac{2}{z}f' + \frac{2}{z^2}f = 0 \ ,$$

en un dominio D que no incluye el cero. En D,

$$p(z) = -\frac{2}{z} \ , \quad q(z) = \frac{2}{z^2} \ ,$$

son analíticas, holomorfas.

Dos soluciones l.i. son

$$\psi_1(z) = z \ , \quad \psi_2(z) = z^2 \ .$$

El Wronskiano:

$$W = 2z^2 - z^2 = z^2 \neq 0 \quad \forall z \in D \ .$$

Volvamos a (14.12). Si $p(z) = 0$, $W(z)$ es constante. Éste es precisamente el caso de la ecuación de Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \big(V(x) + E\big)\right]\psi = 0 \ .$$

Conociendo ψ_1 y ψ_2, soluciones linealmente independientes de (14.1), podemos encontrar p y q. En efecto, de (14.11)

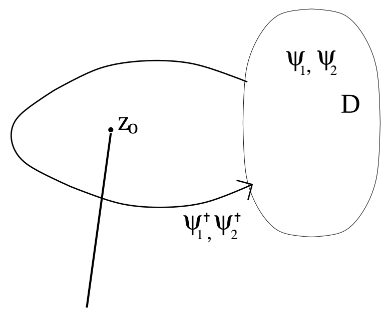
$$p(z) = -\frac{W'(z)}{W(z)} \ . \tag{14.13}$$

Y reemplazando este resultado en (14.1):

$$q(z) = -\frac{\psi_i''(z)}{\psi_i(z)} - p(z)\frac{\psi_i'(z)}{\psi_i(z)} \ , \quad i = 1, 2 \ . \tag{14.14}$$

14.2 Soluciones en la vecindad de puntos singulares

Consideremos ahora la ecuación (14.1), pero sea ahora z_0 un punto fuera del dominio D. Sean ψ_1, ψ_2 base del espacio vectorial de soluciones de (14.1). ψ_1 y ψ_2 son analíticas en D, donde p y q lo son. Supongamos que p o q no son holomofas en z_0. ¿Qué ocurre con nuestras soluciones si las prolongamos analíticamente en torno al punto z_0 y volvemos a D?:



Al recorrer un circuito en torno a un punto singular aparecerá un problema de multivalencia, de modo que en general ψ_1 y ψ_2 no recuperarán sus valores originales al completar el circuito:

$$(\psi_1, \psi_2) \xrightarrow{\circlearrowleft} (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger) \ .$$

La transformación es un endomorfismo de V en V. Después del viaje, las funciones base quedan convertidas en ciertas combinaciones lineales de las funciones originales:

$$\begin{aligned} \psi_1^\dagger &= a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2 \ , \\ \psi_2^\dagger &= a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2 \ , \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} \psi_1^\dagger \\ \psi_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \ . \tag{14.15}$$

La matriz de la transformación se denomina *matriz de circunvalación* asociada a la base $\{\psi_1, \psi_2\}$.

Para que $\psi_1^\dagger$ y $\psi_2^\dagger$ sean l.i., y por tanto sigan siendo base de V, se debe cumplir que el determinante de la matriz de circunvalación sea no nulo:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \ .$$

Nuestro propósito a continuación será encontrar bases "canónicas", en el siguiente sentido: deseamos construir una solución Φ de (14.1) tal que

$$\Phi \xrightarrow{\circlearrowleft} \Phi^\dagger = \lambda\Phi \ , \qquad \lambda = \text{cte.} \tag{14.16}$$

Sea entonces $\{\psi_1, \psi_2\}$ una base de soluciones. Entonces

$$\Phi = b_1\psi_1 + b_2\psi_2 \ .$$

Luego del viaje:

$$\lambda\Phi = \Phi^{\dagger} = b_1\psi_1^{\dagger} + b_2\psi_2^{\dagger} \ .$$

Con (14.15):

$$\lambda(b_1\psi_1 + b_2\psi_2) = (b_1a_{11} + b_2a_{21})\psi_1 + (b_1a_{12} + b_2a_{22})\psi_2 \ .$$

Siendo $\{\psi_1, \psi_2\}$ l.i.:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)b_1 + a_{21}b_2 &= 0 \ , \\ a_{12}b_1 + (a_{22} - \lambda)b_2 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Existen soluciones no triviales si

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ , \tag{14.17}$$

es decir, nuestro problema corresponde a encontrar los autovalores de la matriz de circunvalación. (Algo esperable, por cierto.)

Sean ahora λ_1 y λ_2 las soluciones de esta ecuación. Existen dos posibilidades:

a) Sea $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En este caso podemos escoger la base tal que

$$\begin{aligned} \psi_1^{\dagger} &= \lambda_1\psi_1 \ , \\ \psi_2^{\dagger} &= \lambda_2\psi_2 \ . \end{aligned}$$

La matriz de circunvalación en la base canónica es diagonal:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{\dagger} \\ \psi_2^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \ . \tag{14.18}$$

Es conveniente introducir la siguiente definición:

Definición 14.3

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_k \ . \tag{14.19}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (z - z_0)^{\sigma_k} \circlearrowright \ [(z - z_0)^{\sigma_k}]^{\dagger} &= \left[e^{\sigma_k \ln(z - z_0)}\right]^{\dagger} \\ &= e^{\sigma_k[\ln(z - z_0) + 2\pi i]} = (z - z_0)^{\sigma_k} e^{2\pi i\sigma_k} = \lambda_1(z - z_0)^{\sigma_k} \ . \end{aligned}$$

En resumen:

$$\begin{aligned} \psi_k^{\dagger} &= \lambda_k\psi_k \ , \\ [(z - z_0)^{\sigma_k}]^{\dagger} &= \lambda_k(z - z_0)^{\sigma_k} \ . \end{aligned}$$

O sea el cuociente

$$\left[\frac{\psi_k}{(z-z_0)^{\sigma_k}}\right]^\dagger = \frac{\psi_k}{(z-z_0)^{\sigma_k}} \ ,$$

es decir, queda univalente al dar la vuelta en torno al punto singular z_0, luego este cuociente admite un desarrollo de Laurent:

$$\frac{\psi_k(z)}{(z-z_0)^{\sigma_k}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{k\nu}(z-z_0)^\nu \ .$$

En resumen: Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, existe una base cuyo desarrollo en la vecindad del punto singular z_0 es:

$$\psi_1(z) = (z-z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{1\nu}(z-z_0)^\nu \ , \tag{14.20}$$

$$\psi_2(z) = (z-z_0)^{\sigma_2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{2\nu}(z-z_0)^\nu \ . \tag{14.21}$$

b) Si $\lambda_1 = \lambda_2$, estamos en un caso "incómodo". Supongamos que la base transforma del siguiente modo:

$$\psi_1 \circlearrowleft \psi_1^\dagger = \lambda_1\psi_1 \ ,$$
$$\psi_2 \circlearrowleft \psi_2^\dagger = a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2 \ .$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix}\psi_1^\dagger \\ \psi_2^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix} \ .$$

La ecuación de autovalores es:

$$(\lambda_1 - \lambda)(a_{22} - \lambda) = 0 \ .$$

para que $\lambda_1 = \lambda_2$ debe tenerse que $\lambda_1 = a_{22}$, es decir

$$\psi_2^\dagger = a_{21}\psi_1 + \lambda_1\psi_2 \ ,$$

de donde

$$\frac{\psi_2^\dagger}{\psi_1^\dagger} = \frac{a_{21}\psi_1 + \lambda_1\psi_2}{\lambda_1\psi_1} = \frac{\psi_2}{\psi_1} + \frac{a_{21}}{\lambda_1} \ . \tag{14.22}$$

Afirmamos que

$$\chi = \frac{\psi_2}{\psi_1} - \frac{a_{21}}{\lambda_1}\frac{1}{2\pi i}\ln(z-z_0) \tag{14.23}$$

es univalente en torno a z_0. En efecto, usando (14.22):

$$\chi^\dagger = \frac{\psi_2^\dagger}{\psi_1^\dagger} - \frac{a_{21}}{\lambda_1 2\pi i}[\ln(z-z_0)+2\pi i] = \frac{\psi_2}{\psi_1} - \frac{a_{21}}{\lambda_1}\frac{1}{2\pi i}\ln(z-z_0) = \chi \ .$$

Podemos entonces desarrollar en una serie de Laurent en torno a z_0:

$$\chi = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} d_\mu (z-z_0)^\mu \ ,$$

o bien

$$\psi_2 = \psi_1 \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} d_\mu (z-z_0)^\mu + \frac{a_{21}}{2\pi i \lambda_1}\psi_1 \ln(z-z_0) \ .$$

Pero ψ_1 es autovector de la matriz de circunvalación, por tanto tiene un desarrollo de Laurent del tipo (14.20). Reordenando entonces las series, obtenemos:

$$\psi_2 = (z-z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{2\nu} (z-z_0)^\nu + \frac{a_{21}}{2\pi i \lambda_1}\psi_1(z) \ln(z-z_0) \ .$$

Si $a_{21} \neq 0$ podemos dividir ψ_2 por a_{21}, es decir, podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $a_{21} = 1$.

En resumen: Si $\lambda_1 = \lambda_2$ existe una base canónica cuyo desarrollo en la vecindad del punto singular z_0 es:

$$\psi_1(z) = (z-z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{1\nu} (z-z_0)^\nu \ , \tag{14.24}$$

$$\psi_2(z) = (z-z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{2\nu} (z-z_0)^\nu + \frac{1}{2\pi i \lambda_1}\psi_1(z) \ln(z-z_0) \ . \tag{14.25}$$

Resumimos los resultados anteriores en el siguiente teorema.

Teorema 14.3 Si los coeficientes $p(z)$ y $q(z)$ son singulares en z_0, entonces existen dos soluciones l.i. que en la vecindad de z_0 tienen la forma:

a) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (caso cómodo):

$$\psi_1(z) = (z-z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{1\nu} (z-z_0)^\nu \ , \tag{14.26}$$

$$\psi_2(z) = (z-z_0)^{\sigma_2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{2\nu} (z-z_0)^\nu \ . \tag{14.27}$$

b) Si $\lambda_1 = \lambda_2$ (caso incómodo):

$$\psi_1(z) = (z - z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{1\nu}(z - z_0)^{\nu} , \tag{14.28}$$

$$\psi_2(z) = (z - z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{2\nu}(z - z_0)^{\nu} + \frac{1}{2\pi i \lambda_1}\psi_1(z)\ln(z - z_0) . \tag{14.29}$$

En estas expresiones,

$$\sigma_k = \frac{\ln \lambda_k}{2\pi i} . \tag{14.30}$$

Definición 14.4 *z_0 es un **punto de holomorfía** de la ecuación* (14.1) *si en z_0 todas las soluciones de esta ecuación son holomorfas.*

Teorema 14.4 z_0 es punto de holomorfía si y sólo si $p(z)$ y $q(z)$ son holomorfas en z_0.

Demostración

i) Si $p(z)$ y $q(z)$ son holomorfas en z_0, entonces z_0 es punto de holomorfía.

   Ya demostrado.

ii) Si z_0 es punto de holomorfía, entonces $p(z)$ y $q(z)$ son holomorfas en z_0.

   De (14.11) se tiene de inmediato que

$$p(z) = -\frac{W'}{W}$$

   es holomorfa. Y de (14.14), $q(z)$ también debe ser holomorfa. El único problema podría ocurrir si $\psi_j(z) = 0$ para algún z. Pero la otra función l.i. no puede ser nula en el mismo punto (si lo fuese, el Wronskiano sería nulo en ese punto, lo que contradice la independencia lineal), y basta considerar entonces aquella función que no es nula en ese punto.

q.e.d.

Definición 14.5 *Un punto es una **singularidad Fuchsiana** de* (14.1) *si en ese punto $p(z)$ y $q(z)$ no son ambas holomorfas y si el desarrollo de Laurent de las soluciones (base canónica) tiene una cantidad finita de términos de potencias negativas. Es decir, los cuocientes univalentes son meromorfos.*

Definición 14.6 *Una función se dice **meromorfa** si es analítica en todo el plano finito excepto en un número finito de polos. Por ejemplo: $z/[(z+1)(z-3)^3]$.*

Teorema 14.5 (Fuchs) Para que z_0 sea una singularidad Fuchsiana de (14.1) es necesario y suficiente que $p(z)$ tenga en z_0 a lo sumo un polo simple y $q(z)$ tenga en z_0 a lo sumo un polo doble, sin ser ambas holomorfas.

Demostración

i) Demostración de necesidad.

Sea $z_0 = 0$ singularidad Fuchsiana de (14.1). Consideremos la base canónica:

$$\psi_1(z) = z^{\sigma_1} \sum_{\nu=-n}^{\infty} c_{1\nu} z^{\nu} \qquad c_{1,-n} \neq 0 \ ,$$
$$\psi_2(z) = z^{\sigma_2} \sum_{\nu=-m}^{\infty} c_{2\mu} z^{\mu} + \eta \ln(z) \psi_1(z) \qquad c_{2,-m} \neq 0 \ ,$$

donde

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{caso cómodo} \\ \dfrac{1}{2\pi i \lambda_1} & \text{caso incómodo} \end{cases}$$

Con las definiciones

$$\overline{\sigma}_1 = \sigma_1 - n \ ,$$
$$\overline{\sigma}_2 = \sigma_2 - m \ ,$$

podemos reescribir las series anteriores de modo que ambas comiencen en el índice cero:

$$\psi_1(z) = z^{\overline{\sigma}_1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \overline{c}_{1\mu} z^{\mu} \qquad \overline{c}_{10} \neq 0 \ ,$$
$$\psi_2(z) = z^{\overline{\sigma}_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{c}_{2\nu} z^{\nu} + \eta \ln(z) \psi_1(z) \qquad \overline{c}_{20} \neq 0 \ .$$

$p(z)$ viene dado por (14.11). Observemos que

$$W = \psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1' = \left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \right)' \psi_1^2 \ .$$

Pero

$$\frac{\psi_2}{\psi_1} = \eta \ln z + z^{\overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} \ ,$$
$$\left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \right)' = \frac{\eta}{z} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}_1 + \nu) a_{\nu} z^{\nu + \overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}_1 - 1} \ ,$$

luego

$$W = \left(\frac{\eta}{z} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}_1 + \nu) a_{\nu} z^{\nu + \overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}_1 - 1} \right) \left(z^{\overline{\sigma}_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{c}_{1\nu} z^{\nu} \right)^2 \ ,$$

lo que se puede reescribir siempre en la forma

$$W = z^\tau \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu \ , \qquad b_0 \neq 0 \ .$$

De aquí,

$$W' = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\tau+\nu) b_\nu z^{\nu-1+\tau} = \frac{1}{z} z^\tau \sum_{\nu=0}^{\infty} (\tau+\nu) b_\nu z^\nu \ .$$

$p(z)$ tiene entonces la forma:

$$p(z) = -\frac{W'}{W} = \frac{-1}{z} \frac{\tau b_0 + (\tau+1) b_1 z + \cdots}{b_0 + b_1 z + \cdots} \ .$$

Si $\tau = 0$, entonces $p(z)$ es holomorfa. Si $\tau \neq 0$, entonces $p(z) = -\tau/z + \cdots$, luego tiene un polo simple en $z = 0$.

De modo análogo podemos estudiar $q(z)$, dado por (14.14). Basta observar que

$$\frac{\psi_1'}{\psi_1} = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} (\overline{\sigma}_1 + \nu) \overline{c}_{1\nu} z^{\overline{\sigma}_1 + \nu + 1}}{\sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{c}_{1\nu} z^{\overline{\sigma}_1 + \nu}} = \frac{1}{z} \frac{\overline{\sigma}_1 \overline{c}_{10} + (\overline{\sigma}_1 + 1) z + \cdots}{\overline{c}_{10} + \overline{c}_{11} z + \cdots}$$

tiene a lo sumo un polo simple en $z = 0$.

Análogamente, ψ_1''/ψ_1' tiene a lo sumo un polo simple en $z = 0$. Luego $q(z)$ tiene a lo sumo un polo doble en $z = 0$.

ii) Demostración de suficiencia.

Supongamos que $p(z)$ y $q(z)$ tienen a lo sumo un polo simple y doble, respectivamente, en $z = 0$. Reescribamos (14.1):

$$f'' + \frac{P(z)}{z} f' + \frac{Q(z)}{z^2} f = 0 \ , \tag{14.31}$$

con $P(z)$ y $Q(z)$ analíticas:

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu z^\nu \ , \tag{14.32}$$

$$Q(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu z^\nu \ . \tag{14.33}$$

Planteamos una solución de la forma

$$f = z^\sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^{\nu+\sigma} \ , \qquad c_0 \neq 0 \ . \tag{14.34}$$

Entonces

$$f' = \frac{z^\sigma}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (\nu + \sigma) z^\nu \ ,$$

$$f'' = \frac{z^\sigma}{z^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (\nu + \sigma)(\nu + \sigma - 1) z^\nu \ .$$

La ecuación diferencial nos queda:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (\sigma + \nu)(\sigma + \nu - 1) z^\nu + \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} p_\mu z^\mu \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (\sigma + \nu) z^\nu \right) + \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} q_\mu z^\mu \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \right) = 0 \ . \tag{14.35}$$

Comparando coeficientes para $z = 0$:

$$c_0 \sigma(\sigma - 1) + p_0 c_0 \sigma + q_0 c_0 = 0 \ ,$$

es decir, se obtiene la llamada *ecuación indicial*:

$$\boxed{\sigma(\sigma - 1) + p_0 \sigma + q_0 = 0} \tag{14.36}$$

Sean las raíces de la ecuación indicial σ_1 y σ_2

Definamos

$$\Phi(\sigma) = \sigma(\sigma - 1) + p_0 \sigma + q_0 \ ,$$

de modo que

$$\Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_2) = 0 \ .$$

Igualando los coeficientes de z^1 en (14.35):

$$c_1(\sigma + 1)\sigma + p_0 c_1 (\sigma + 1) + p_1 c_0 \sigma + q_0 c_1 + q_1 c_0 = 0 \ ,$$

$$c_1[(\sigma + 1)\sigma + p_0(\sigma + 1) + q_0] = -c_0(\sigma p_1 + q_1) \ ,$$

$$c_1 \Phi(\sigma + 1) = -c_0(\sigma p_1 + q_1) \ .$$

Análogamente, para z^n, se obtienen ecuaciones de la forma:

$$c_n \Phi(\sigma + n) = \cdots$$

De este modo, si $\Phi(\sigma + n) \neq 0$ para $n = 1, 2, 3 \ldots$, podemos dividir por Φ cada ecuación y obtener los coeficientes de la serie.

El procedimiento para resolver (14.31) es entonces, primero, resolver la ecuación

$$\Phi(\sigma) = 0 \ ,$$

para obtener σ_1 y σ_2.

Se pueden presentar dos casos:

I)

$$\sigma_1 - \sigma_2 \notin \mathbb{Z} \ . \tag{14.37}$$

En este caso,

$$\sigma_1 + n \neq \sigma_2 \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \ ,$$

y por tanto

$$\Phi(\sigma_i + n) \neq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \ , \qquad i = 1, 2 \ .$$

Es posible entonces obtener todos los coeficientes de la expansión en serie de la solución. Pero además, (14.37) asegura que

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \ ,$$

de modo que los coeficientes obtenidos por el método descrito son distintos en general, y las dos soluciones resultantes son linealmente independientes.

II)

$$\sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{Z} \ . \tag{14.38}$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$\mathrm{Re}\, \sigma_1 \geq \mathrm{Re}\, \sigma_2 \ .$$

Entonces de (14.38) se sigue que

$$\Phi(\sigma_1 + n) \neq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Por tanto, el procedimiento anterior de dividir por $\Phi(\sigma_1 + n)$ es válido, obteniéndose la solución asociada a σ_1.

Para σ_2, por su parte, puede haber problemas, pues $\Phi(\sigma_2 + n) = 0$ cuando $n = \sigma_1 - \sigma_2$ y no se pueden obtener los coeficientes de la solución. Esto significa que la solución no es de la forma (14.34), y se necesita la expresión más general, con un término logarítmico. De todos modos $z = 0$ será singularidad Fuchsiana.

q.e.d.

14.3 Singularidades en infinito

Consideremos el cambio de variable

$$s = \frac{1}{z} \tag{14.39}$$

en la ecuación (14.1), y definamos

$$\overline{f}(s) = f(z) = f\left(\frac{1}{s}\right) \ . \tag{14.40}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dz} &= -\frac{1}{z^2} = -s^2 \ , \\
\frac{d\overline{f}}{dz} &= \frac{d\overline{f}}{ds}\frac{ds}{dz} = -s^2\frac{d\overline{f}}{ds} \ , \\
\frac{d^2\overline{f}}{dz^2} &= s^4\frac{d^2\overline{f}}{ds^2} + 2s^3\frac{d\overline{f}}{ds} \ ,
\end{aligned}$$

de modo que $\overline{f}$ satisface:

$$\frac{d^2\overline{f}}{ds^2} + \frac{2s - p(1/s)}{s^2}\frac{d\overline{f}}{ds} + \frac{q(1/s)}{s^4}\overline{f} = 0 \ . \tag{14.41}$$

Este resultado nos conduce a la siguiente definición:

Definición 14.7 *Infinito es punto de holomorfía de* (14.1) *si cero lo es de* (14.41).

Proposición 14.2 Infinito es punto de holomorfía de (14.1) si:

a) $2s - p(1/s)$ tiene en cero un lugar nulo de multiplicidad doble o mayor (es decir, $2s - p(1/s) \sim s^n$, con $n \geq 2$, cuando $s \to 0$).

b) $q(1/s)$ tiene en cero un lugar nulo de multiplicidad cuádruple o mayor.

Demostración Es inmediata del teorema 14.4 y de la forma de (14.41).

Análogamente definimos la singularidad Fuchsiana en infinito:

Definición 14.8 *Infinito es singularidad Fuchsiana de* (14.1) *si cero lo es de* (14.41).

Proposición 14.3 Infinito es singularidad Fuchsiana de (14.1) si no es punto de holomorfía y al menos

a) $q(1/s)$ tiene un lugar nulo doble en $s = 0$.

b) $p(1/s)$ tiene un lugar nulo simple en $s = 0$.

Demostración Inmediata del teorema de Fuchs 14.5 y de la forma de (14.41).

14.4 Ejemplos

1) Ecuación diferencial de Laguerre:

$$zf'' + (1-z)f' + nf = 0 \ , \tag{14.42}$$

o, equivalentemente,

$$f'' + \frac{1-z}{z}f' + \frac{nz}{z^2}f = 0 \ . \tag{14.43}$$

Claramente $z = 0$ es singularidad Fuchsiana. En cuanto a $z = \infty$, observemos que $p(1/s)$ es holomorfo en $s = 0$:

$$p\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1-(1/s)}{(1/s)} = s - 1 \ ,$$

de modo que $z = \infty$ no es singularidad Fuchsiana.

Siguiendo las definiciones (14.31), (14.32) y (14.33) para la ecuación de Laguerre

$$P(z) = 1 - z \ , \qquad Q(z) = nz \ ,$$

luego

$$p_0 = 1 \ , \qquad q_0 = 0 \ .$$

La ecuación indicial es entonces

$$\begin{gathered} \sigma(\sigma-1) + \sigma = 0 \\ \sigma^2 = 0 \\ \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \end{gathered}$$

Estamos pues en el caso incómodo.

En el Cap. 13, Polinomios de Laguerre, ya habíamos encontrado la primera solución, de la forma

$$\Psi_1(z) = z^{\sigma_1}\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu z^\nu \ . \tag{14.44}$$

Corresponde a los polinomios de Laguerre L_n. Falta encontrar la segunda solución, linealmente independiente con L_n:

$$\Psi_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^\nu + \Psi_1(z)\ln(z) \ . \tag{14.45}$$

El primer polinomio de Laguerre es $L_{n=0} = 1$, de modo que:

$$\Psi_2(z) = \ln(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^\nu \ , \quad n = 0 \ . \tag{14.46}$$

Reemplazando en (14.42):

$$0 = z\left(-\frac{1}{z^2} + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu \nu(\nu-1) z^{\nu-2}\right) + (1-z)\left(\frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \nu z^{\nu-1}\right)$$
$$0 = -1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu \nu(\nu-1) z^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \nu z^{\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \nu z^{\nu}$$

Se sigue la relación de recurrencia:

$$f_{\nu+1}(\nu^2 + 2\nu + 1) = f_\nu \nu \ , \quad \nu \geq 1 \ ,$$
$$f_{\nu+1} = \frac{f_\nu \nu}{(\nu+1)^2} \ .$$

Escogiendo

$$f_1 = 1 \ ,$$

se obtiene

$$f_n = \frac{(n-1)!}{(n!)^2} = \frac{1}{n \cdot n!} \ .$$

Así, las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Laguerre para $n = 0$ son:

$$\Psi_1(z) = L_0(z) = 1 \ ,$$
$$\Psi_2(z) = \ln(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu \cdot \nu!} \ .$$

2) La ecuación

$$z^2 f'' + z\left(z - \frac{1}{2}\right) f' + \frac{1}{2} f = 0$$

tiene una singularidad Fuchsiana en $z = 0$. La ecuación indicial es:

$$\sigma(\sigma - 1) - \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2} = 0 \ ,$$

luego

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \ , \quad \sigma_2 = 1 \quad \text{y} \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \ .$$

i) Obtengamos la primera solución l.i., con $\sigma = 1/2$. En este caso

$$f = \sqrt{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{\nu+1/2} \ .$$

Sustituyendo en la ecuación y comparando potencias de z obtenemos la relación de recurrencia

$$a_\nu = -\frac{a_\nu - 1}{\nu} \ , \quad \nu \geq 1 \ .$$

Tomando $a_0 = 1$:

$$a_1 = -1 \ , \quad a_2 = \frac{1}{2} \ , \quad a_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3!} \ , \quad \ldots \ ,$$

$$a_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu!} \ .$$

Luego

$$f(z) = \sqrt{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^\nu}{\nu!} = e^{-z}\sqrt{z} \ .$$

ii) La segunda solución corresponde a $\sigma = 1$:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{\nu+1} \ .$$

Obtenemos la relación de recurrencia

$$a_\nu = -\frac{a_{\nu+1}}{\nu + 1/2} \ , \quad \nu \geq 1 \ .$$

Tomando $a_0 = 1$, resulta

$$a_\nu = (-1)^\nu \frac{2^\nu}{(2\nu+1)!!} \ ,$$

$$f(z) = z \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2z)^\nu}{(2\nu+1)!!} \ .$$

14.5 Ecuaciones con $n \leq 3$ singularidades Fuchsianas

Nuestro objetivo ahora será encontrar el tipo de ecuación (14.1) más general tal que sea holomorfa en todo el plano "completo" (es decir, incluyendo infinito), salvo en 0, 1, 2 ó 3 singularidades Fuchsianas, una de las cuales podría estar en infinito. Esto es, $p(z)$, $q(z)$, $p(1/s)$ y $q(1/s)$ deben ser meromorfas.

Proposición 14.4 Para que la ecuación (14.1) tenga sólo singularidades Fuchsianas es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - \alpha_k} \ , \tag{14.47a}$$

$$q(z) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2} + \frac{C_k}{(z-\alpha_k)} \right] \ , \tag{14.47b}$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k = 0 \ . \tag{14.47c}$$

Demostración Para que $z=\infty$ sea a lo sumo singularidad Fuchsiana, se debe tener que

$$p\left(\frac{1}{s}\right) = a_1 s + a_2 s^2 + \cdots$$
$$q\left(\frac{1}{s}\right) = a_0 s^2 + a_3 s^3 + \cdots$$

Para que además α_1, α_2, ... , α_n sean singularidades Fuchsianas, se debe tener que $p(z)$ a lo sumo tenga un polo de primer orden y $q(z)$ a lo sumo uno de segundo orden:

$$p(z) = \frac{P(z)}{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)} \ , \tag{14.48a}$$
$$q(z) = \frac{Q(z)}{(z-\alpha_1)^2\cdots(z-\alpha_n)^2} \ , \tag{14.48b}$$

donde el grado de $P(z)$ es al menos un grado inferior al grado del denominador de $p(z)$, y el grado de $Q(z)$ es al menos dos grados inferior al grado del denominador de $q(z)$.

Y descomponiendo $p(z)$ y $q(z)$ en fracciones parciales:

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z-\alpha_k} \ ,$$
$$q(z) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2} + \frac{C_k}{(z-\alpha_k)} \right] \ ,$$
$$\sum_{k=1}^{n} C_k = 0 \ .$$

q.e.d.

Ahora revisemos cada uno de los casos que nos interesan.

14.5.1 $n = 0$ singularidades Fuchsianas

Para que $p(z)$ y $q(z)$ no tengan singularidades deben ser ambos polinomios:

$$p(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$$
$$q(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots$$

De este modo

$$p\left(\frac{1}{s}\right) = p_0 + p_1\frac{1}{s} + p_2\frac{1}{s^2} + \cdots$$
$$q\left(\frac{1}{s}\right) = q_0 + q_1\frac{1}{s} + q_2\frac{1}{s^2} + \cdots$$

Pero las condiciones (14.48) implican que

$$p(z) = q(z) = 0 \ ,$$

de lo cual se sigue que $z=\infty$ es singularidad Fuchsiana (Proposición 14.3). Esto es una contradicción, luego no existen ecuaciones de la forma (14.1) sin singularidades Fuchsianas.

14.5.2 $n = 1$ singularidades Fuchsianas, en $z = \infty$

De lo dicho en la Subsección 14.5.1, si la ecuación (14.1) tiene una única singularidad Fuchsiana, y localizada en $z = \infty$, entonces

$$p(z) = q(z) = 0 \ ,$$

de donde, en (14.47)

$$A_k = B_k = C_k = 0 \ .$$

La ecuación con una singularidad Fuchsiana en $z = \infty$ es pues

$$f'' = 0 \ , \tag{14.49}$$

y su solución es

$$f(z) = c_1 + c_2 z \ . \tag{14.50}$$

14.5.3 $n = 1$ singularidades Fuchsianas, en $z = 0$

En este caso $n = 1$ en (14.47), y por tanto, de (14.47c),

$$C_1 = 0 \ .$$

Luego, escribiendo $A_1 = A$ y $B_1 = B$,

$$p(z) = \frac{A}{z} \ , \quad q(z) = \frac{B}{z^2} \ ,$$

y la ecuación es de la forma:

$$f'' + \frac{A}{z} f' + \frac{B}{z^2} f = 0 \ .$$

Pero $z = \infty$ es punto de holomorfía, de modo que (Proposición 14.2)

a)

$$2s - p\left(\frac{1}{s}\right) = 2s - As$$

debe tener al menos un lugar nulo doble en $s = 0$, vale decir,

$$A = 2 \ .$$

b)

$$q\left(\frac{1}{s}\right) = Bs^2$$

debe tener al menos un lugar nulo cuádruple en $s = 0$, luego

$$B = 0 \ .$$

La ecuación con una singularidad Fuchsiana en $z = 0$ es entonces

$$f'' + \frac{2}{z} f' = 0 \ . \tag{14.51}$$

Sus soluciones:

$$f_1 = c_1 \ , \tag{14.52}$$

$$f_2 = \frac{c_2}{z} \ . \tag{14.53}$$

14.5.4 $n = 2$ singularidades Fuchsianas, en $z = 0$ y $z = \infty$

En este caso $n = 1$ en (14.47), de modo que $C_1 = 0$. Escribamos $A_1 = A$ y $B_1 = B$. Para que infinito sea singularidad Fuchsiana, de la Proposición 14.3 se sigue que $2s - p(1/s) = 2s - As$ debe tener un lugar nulo simple en $s = 0$ y $q(1/s) = Bs^2$ debe tener un lugar nulo doble en $s = 0$. Ambas condiciones se cumplen, de modo que no hay nuevas restricciones sobre A y B. La ecuación más general con dos singularidades Fuchsianas, una de ellas en infinito, es la *ecuación diferencial de Euler*:

$$\boxed{f'' + \frac{A}{z} f' + \frac{B}{z^2} f = 0} \tag{14.54}$$

Determinemos sus soluciones. La ecuación indicial es

$$\sigma(\sigma - 1) + A\sigma + B = 0 \ .$$

Sean σ_1 y σ_2 las dos soluciones de ella:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(1 - A + \sqrt{(1-A)^2 - B^2}\right) \ ,$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left(1 - A - \sqrt{(1-A)^2 - B^2}\right) \ .$$

1) Caso $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (caso cómodo).

En cualquier dominio de conexión simple que no contiene al cero z^{σ_1} y z^{σ_2} son dos soluciones l.i. La solución general es

$$f = c_1 z^{\sigma_1} + c_2 z^{\sigma_2} \ . \tag{14.55}$$

2) Caso $\sigma_1 = \sigma_2$ (caso incómodo).

Una solución no trivial es:

$$f_1 = z^{\sigma_1} \ .$$

La otra viene dada por:

$$f_2 = z^{\sigma_1} \ln z \ ,$$

como es fácil comprobar reemplazando en (14.54).

La solución general en este caso es entonces

$$f = c_1 z^{\sigma_1}(1 + c_2 \ln z) \ . \tag{14.56}$$

14.5.5 $n = 2$ singularidades Fuchsianas, en $z = a$ y $z = b$, holomorfa en infinito

La ecuación y sus soluciones se obtienen del caso anterior por medio de la transformación:

$$z \longrightarrow \frac{z-a}{z-b} \; . \tag{14.57}$$

En efecto, bajo esta transformación:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow a \; , \\ \infty &\longrightarrow b \; . \end{aligned}$$

La ecuación diferencial queda de la forma:

$$f'' + \frac{2z - 2aA(a-b)}{(z-a)(z-b)} f' + \frac{B(a-b)^2}{(z-a)^2(z-b)^2} f = 0 \; ,$$

lo que se puede reescribir, con las definiciones adecuadas,

$$f'' + \frac{2z + \overline{A}}{(z-a)(z-b)} f' + \frac{\overline{B}}{(z-a)^2(z-b)^2} f = 0 \; . \tag{14.58}$$

Las soluciones se obtienen simplemente aplicando la transformación (14.57) a la solución hallada en la Subsección 14.5.4:

1) Caso cómodo:

$$f = c_1 \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^{\sigma_1} + c_2 \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^{\sigma_2} \; . \tag{14.59}$$

2) Caso incómodo:

$$f = c_1 \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^{\sigma_1} \left[1 + c_2 \ln \left(\frac{z-a}{z-b} \right) \right] \; . \tag{14.60}$$