Capítulo 15

Funciones hipergeométricas

15.1 La ecuación hipergeométrica general

Consideremos la ecuación diferencial

$$\Psi'' + p(z)\Psi' + q(z)\Psi = 0 \ , \tag{15.1}$$

con tres singularidades fuchsianas localizadas en:

$$z_1 = A \ , \qquad z_2 = B \ , \qquad z_3 = C \ ,$$

y con $z = \infty$ punto de holomorfía.

Para que la ecuación (15.1) tenga singularidades fuchsianas, $p(z)$ debe tener a lo más un polo simple en cada una de ellas, tomando la forma:

$$p(z) = \frac{h}{z-A} + \frac{k}{z-B} + \frac{l}{z-C} \ . \tag{15.2}$$

Para que $z = \infty$ sea punto de holomorfía

$$2s - p\left(\frac{1}{s}\right) = 2s - \frac{hs}{1-As} - \frac{ks}{1-Bs} - \frac{ls}{1-Cs} \ , \tag{15.3}$$

debe tener a lo menos un lugar nulo doble en $s = 0$. Lo anterior implica que las constantes debe satisfacer la condición siguiente $h + k + l = 2$. La característica de singularidades fuchsianas impone sobre la función $q(z)$ a lo más polos dobles en las singularidades, es decir,

$$q(z) = \frac{Q(z)}{(z-A)^2(z-B)^2(z-C)^2} \ , \tag{15.4}$$

y para que infinito sea punto de holomorfía $q(1/s)$ debe tener a lo menos un lugar nulo cuádruple en $s = 0$. Luego a lo sumo $Q(z)$ debe ser un polinomio de grado 2.

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{a + bz + cz^2}{(z-A)^2(z-B)^2(z-C)^2} = \frac{a + b/s + c/s^2}{(1/s-A)^2(1/s-B)^2(1/s-C)^2} \ , \\ &= \frac{as^2 + bs + c}{(1-As)^2(1-Bs)^2(1-Cs)^2}\frac{1/s^2}{1/s^6} = s^4\frac{as^2 + bs + c}{(1-As)^2(1-Bs)^2(1-Cs)^2} \ , \end{aligned} \tag{15.5}$$

claramente no impone nuevas restricciones sobre $q(z)$, la cual podemos escribir de forma general como:

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{Q(z)}{(z-A)(z-B)(z-C)}\left[\frac{1}{(z-A)(z-B)(z-C)}\right] \\ &= \left(\frac{H}{z-A}+\frac{K}{z-B}+\frac{L}{z-C}\right)\left[\frac{1}{(z-A)(z-B)(z-C)}\right] . \end{aligned} \tag{15.6}$$

Reemplazando la forma general de $p(z)$ y $q(z)$ dadas en (15.2) y (15.6) en (15.1) obtenemos la *ecuación hipergeométrica general*:

$$\begin{aligned} &\Psi'' + \left[\frac{h}{z-A}+\frac{k}{z-B}+\frac{l}{z-C}\right]\Psi' \\ &\quad + \left(\frac{H}{z-A}+\frac{K}{z-B}+\frac{L}{z-C}\right)\left[\frac{1}{(z-A)(z-B)(z-C)}\right]\Psi = 0 , \end{aligned} \tag{15.7}$$

con $h+k+l=2$, *i.e.* 5 constantes libres.

15.2 Ecuación indicial

Consideremos la singularidad fuchsiana en $z=A$, su ecuación indicial corresponde a:

$$\sigma(\sigma-1)+h\sigma+\frac{H}{(A-B)(A-C)} = 0 . \tag{15.8}$$

Sean α y α' las dos soluciones de esta ecuación, entonces

$$\alpha+\alpha' = 1-h \qquad \text{y} \qquad \alpha\alpha' = \frac{H}{(A-B)(A-C)} .$$

Análogamente sean β y β' y γ y γ' las soluciones respectivas de la ecuación indicial en las singularidades fuchsianas $z=B$ y $z=C$, con

$$\beta+\beta' = 1-k , \qquad \beta\beta' = \frac{K}{(B-A)(B-C)} ,$$

$$\gamma+\gamma' = 1-l , \qquad \gamma\gamma' = \frac{L}{(C-A)(C-B)} .$$

Tenemos $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 3-k-l-h = 3-(k+l+h) = 3-2 = 1$.

De lo anterior podemos eliminar de la ecuación hipergeométrica los coeficientes h, k, l, H, K, L y escribirla en función de α, α', β, β', γ y γ'

$$\begin{aligned} &\Psi'' + \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-A}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-B}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-C}\right]\Psi' + \left[\frac{(C-A)(A-B)(B-C)}{(z-A)(z-B)(z-C)}\right] \\ &\times\left(\frac{\alpha\alpha'}{(z-A)(B-C)}+\frac{\beta\beta'}{(z-B)(C-A)}+\frac{\gamma\gamma'}{(z-C)(A-B)}\right)\Psi = 0 , \end{aligned} \tag{15.9}$$

con singularidades fuchsianas en $z_1 = A$, $z_2 = B$ y $z_3 = C$ y 5 constantes independientes, ya que tenemos la restricción de que

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1 \; .$$

La solución más general de esta ecuación es la llamada *función P de Riemann* la cual denotamos por

$$\Psi(z) = P \left\{ \begin{array}{cccc} A & B & C & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array} \right\} \; . \tag{15.10}$$

15.3 Ecuación diferencial de Gauss

Consideremos el caso particular $z_1 = A = 0$, $z_2 = B = 1$ y $z_3 = C \to \infty$. Elegimos además $\alpha' = \beta' = 0$, obteniendo

$$\Psi'' + \left[\frac{1-\alpha}{z} + \frac{1-\beta}{z-1} \right] \Psi' + \frac{\gamma\gamma'}{z(z-1)} \Psi = 0 \; . \tag{15.11}$$

Las constantes deben satisfacer $\alpha + \beta + \gamma + \gamma' = 1$, lo cual deja sólo tres constantes independientes. La ecuación (15.11) es conocida como *ecuación diferencial de Gauss* y su solución, escrita como función P de Riemann, es:

$$\Psi(z) = P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ 0 & 0 & \gamma' & \end{array} \right\} \; . \tag{15.12}$$

Haciendo un cambio de notación

$$1 - \alpha = c \; , \qquad \gamma = a \; , \qquad \gamma' = b \; .$$

Podemos despejar β a partir de la condición que satisfacen las raíces de la ecuación indicial,

$$\beta = 1 - \alpha - \gamma - \gamma' = c - a - b \; ,$$

luego, la ecuación diferencial de Gauss (15.11) queda de la forma

$$\Psi'' + \frac{(1+a+b)(z-c)}{z(z-1)} \Psi' + \frac{ab}{z(z-1)} \Psi = 0 \; . \tag{15.13}$$

Su solución, escrita como función P de Riemann

$$\Psi(z) = P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 1-c & c-a-b & a & z \\ 0 & 0 & b & \end{array} \right\} \; . \tag{15.14}$$

Busquemos soluciones de (15.13) de la forma

$$\Psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu z^\nu \; , \qquad \text{con } d_0 = 1. \tag{15.15}$$

Recordemos que $z = 0$ es singularidad fuchsiana de (15.13) y las raíces de la ecuación indicial corresponden a $\sigma_1 = 0$ y $\sigma_2 = 1 - c$. Podemos reescribir (15.13) de la forma

$$z(z-1)\Psi'' + (1+a+b)(z-c)\Psi' + ab\,\Psi = 0 \;, \tag{15.16}$$

Reemplazando la serie (15.15) en (15.16) e igualando potencias del mismo orden, obtenemos una relación de recurrencia para los coeficientes d_ν,

$$d_{\nu+1} = \frac{(\nu+a)(\nu+b)}{(\nu+c)(\nu+1)} d_\nu \;, \qquad \text{para } \nu = 0, 1, 2, \cdots \;. \tag{15.17}$$

La exclusión de $c = 0, -1, -2, \cdots$, no es siempre necesaria, ya que es posible que se anule el numerador.

Definición 15.1 *Definimos la función hipergeométrica* ${}_2F_1\,(a, b, c\,; z)$*, por la siguiente serie:*

$$ {}_2F_1\,(a, b, c\,; z) = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!} z^2 + \cdots \;. \tag{15.18}$$

La serie geométrica es un caso particular de la anterior

$$ {}_2F_1\,(1, b, b\,; z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \;.$$

El radio de convergencia de la serie hipergeométrica es igual a uno, exceptuando el caso cuando a o b son iguales a cero o a un entero negativo, en tal caso el radio de convergencia es infinito.

Afirmamos que ${}_2F_1\,(a, b, c\,; z)$ es solución de (15.13). Busquemos la otra solución linealmente independiente correspondiente a la solución de la ecuación indicial $\sigma_2 = 1 - c$. Plantemos

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= z^{1-c}\phi(z) \;, \quad c \neq 1 \;, \\
\Psi'(z) &= (1-c)z^{-c}\phi(z) + z^{1-c}\phi'(z) \;, \\
\psi''(z) &= -(1-c)cz^{-c-1}\phi(z) + 2(1-c)z^{-c}\phi'(z) + z^{1-c}\phi''(z) \;.
\end{aligned}$$

Reemplazando en (15.16)

$$z(z-1)\phi'' + \left[(a+b-2c+3)z - (2-c)\right]\phi' + (a-c+1)(b-c+1)\phi = 0 \;. \tag{15.19}$$

Sustituyendo

$$c \to 2 - c \;, \qquad a \to a - c + 1 \;, \qquad b \to b - c + 1 \;,$$

se obtiene la ecuación hipergeométrica de Gauss, por lo tanto la solución para $\phi(z)$ en (15.19) es:

$$\phi(z) = {}_2F_1\,(a-c+1, b-c+1, 2-c\,; z) \;, \quad \text{con } c \neq 2 \;,$$

luego la otra solución de (15.13) es

$$\Psi(z) = z^{1-c}{}_2F_1\left(a-c+1, b-c+1, 2-c\,; z\right) \ . \tag{15.20}$$

Hagamos un resumen de los resultados anteriores. La ecuación diferencial de Gauss

$$z(z-1)\Psi'' + (1+a+b)(z-c)\Psi' + ab\,\Psi = 0 \ , \tag{15.19}$$

bajo la condición de que $c \notin \mathbb{Z}$ tiene como base de soluciones con centro en cero:

$$\Psi_1 = {}_2F_1\left(a, b, c\,; z\right) \ , \tag{15.21a}$$
$$\Psi_2 = z^{1-c}{}_2F_1\left(a-c+1, b-c+1, 2-c\,; z\right) \ . \tag{15.21b}$$

Si $c = 1$ las soluciones Ψ_1 y Ψ_2 coinciden, en ese caso se debe plantear

$$\Psi_2(z) = \Psi_1(z)\log(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \ .$$

Derivando y reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos una relación de recurrencia para los c_ν.

15.4 La serie hipergeométrica

Analicemos en más detalle la serie hipergeométrica

$${}_2F_1\left(a, b, c\,; z\right) = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu \frac{z^\nu}{\nu!} \ , \tag{15.18}$$

tenemos para el coeficiente $n+1$

$$f_{n+1} = \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}{c(c+1)(c+2)\cdots(c+n)} \ ,$$
$$f_{n+1} = \frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(c+n+1)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(\frac{\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-b)}\right) \ .$$

Reescribamos la serie hipergeométrica usando el anterior resultado

$${}_2F_1\left(a, b, c\,; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b+\nu)}{\Gamma(c+\nu)}\Gamma(a+\nu)\frac{z^\nu}{\nu!} \ ,$$

pero

$$\frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b+\nu)}{\Gamma(c+\nu)} = B(c-b, b+\nu) \ ,$$

con

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \ , \quad \text{para } m > 0 \text{ y } n > 0 \ .$$

Reescribimos la serie, usando la expresión integral de la función beta,

$$
{}_2F_1\left(a,b,c\,;z\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)}\frac{t^\nu z^\nu}{\nu!}\,dt\ ,
$$

con $\mathrm{Re}[c]>\mathrm{Re}[b]>0$.

Ahora como

$$
(1-tz)^{-a}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)\nu!}t^\nu z^\nu\ .
$$

La forma integral de la función hipergeométrica es:

$$
\boxed{{}_2F_1\left(a,b,c\,;z\right)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt\ ,}\qquad(15.22)
$$

con $\mathrm{Re}[c]>\mathrm{Re}[b]>0$, $|\,z\,|<1$ y donde t es una variable compleja.

Proposiciones

a) ${}_2F_1\left(a,b,c\,;z\right)=\dfrac{1}{(1-z)^a}\,{}_2F_1\left(a,c-b,c\,;\dfrac{z}{z-1}\right)$.

b) ${}_2F_1\left(a,b,c\,;z\right)=\dfrac{1}{(1-z)^b}\,{}_2F_1\left(c-a,b,c\,;\dfrac{z}{z-1}\right)$.

c) ${}_2F_1\left(a,b,c\,;1\right)=\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$.

d) ${}_2F_1\left(a,b,c\,;z\right)=(1-z)^{c-a-b}{}_2F_1\left(c-a,c-b,c\,;z\right)$.

Demostraciones

a)

$$
\frac{1}{(1-z)^a}\,{}_2F_1\left(a,c-b,c\,;\frac{z}{z-1}\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}\left(1-\frac{tz}{z-1}\right)^{-a}\frac{1}{(1-z)^a}\,dt\ ,
$$

haciendo el cambio de variable $1-t=t'$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^a}\,{}_2F_1\left(a,c-b,c\,;\frac{z}{z-1}\right)&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t'^{b-1}(1-t')^{c-b-1}\\
&\quad\times\left[(1-z)\left(1-\frac{(1-t')z}{z-1}\right)\right]^{-a}dt'\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^a}\,{}_2F_1\left(a,c-b,c\,;\frac{z}{z-1}\right)&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt\ ,\\
&={}_2F_1\left(a,b,c\,;z\right)\ .
\end{aligned}
$$

b) Directo usando a) y la relación de simetría

$$
{}_2F_1\left(a,b,c\,;z\right) = {}_2F_1\left(b,a,c\,;z\right) \ .
$$

c) y d) Tarea.

Consideremos la expansión en seria de la función $\log(1+z)$ con centro en $z=0$

$$
\begin{aligned}
\log(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \ , \qquad \text{para}\,|\,z\,| < 1 \ , \\
\log(1+z) &= z\left(1 + \frac{1\times 1}{2\times 1!}(-z) + \frac{1\times 2\times 1\times 2}{2\times 3\times 2!}(-z)^2 + \frac{1\times 2\times 3\times 1\times 2\times 3}{2\times 3\times 4\times 3!}(-z)^3 + \cdots\right) \ , \\
\log(1+z) &= z\,{}_2F_1\left(1,1,2\,;-z\right) = \frac{z}{1+z}\,{}_2F_1\left(1,1,2\,;\frac{z}{1+z}\right) \ ,
\end{aligned}
$$

la última igualdad corresponde a la propiedad probada anteriormente. Tenemos que para $|\,z\,| < 1$ sirve la primera expresión $z\,{}_2F_1\left(1,1,2\,;-z\right)$ y no la segunda, para $|\,z\,| > 1$ la primera expresión no nos sirve y si la segunda. Probemos, en forma explícita, la última relación,

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{1+z}\,{}_2F_1\left(1,1,2\,;\frac{z}{1+z}\right) &= \frac{z}{1+z}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{z}{1+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2 + \cdots\right) \ , \\
&= \frac{z}{1+z} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{1+z}\right)^3 + \cdots \ , \\
&= -\log\left(1 - \frac{z}{1+z}\right) = -\log\left(\frac{1}{1+z}\right) = \log(1+z) \ .
\end{aligned}
$$

15.5 Ecuación hipergeométrica confluente

Consideremos la ecuación diferencial de Gauss con singularidades fuchsianas en $z=0$, $z=1$ y $z\to\infty$

$$
z(z-1)\Psi'' + (1+a+b)(z-c)\Psi' + ab\Psi = 0 \ ,
$$

al reemplazar $z = \dfrac{u}{b}$ nos queda

$$
\frac{u}{b}\left(\frac{u}{b} - 1\right)\frac{d^2}{dz^2}\Psi\left(\frac{u}{b}\right) + \left[(a+b+1)\frac{u}{b} - c\right]\frac{d}{dz}\Psi\left(\frac{u}{b}\right) + ab\;\Psi\left(\frac{u}{b}\right) = 0 \ . \tag{15.23}
$$

Definimos $\bar{\Psi}(u) = \Psi\left(\dfrac{u}{b}\right)$ y evaluamos las derivadas

$$
\frac{d\Psi}{du} = \frac{d}{dz}\Psi\left(\frac{u}{b}\right)\frac{1}{b} = \frac{1}{b}\frac{d}{dz}\Psi\left(\frac{u}{b}\right) \ , \qquad \frac{d^2\Psi}{du^2} = \frac{1}{b^2}\frac{d^2}{dz^2}\Psi\left(\frac{u}{b}\right) \ .
$$

Dividiendo (15.23) por $-b$

$$u\left(1-\frac{u}{b}\right)\frac{1}{b^2}\frac{d^2}{dz^2}\Psi\left(\frac{u}{b}\right)-\left[\frac{a+1}{b}+u-c\right]\frac{1}{b}\frac{d}{dz}\Psi\left(\frac{u}{b}\right)-a\;\Psi\left(\frac{u}{b}\right)=0\;,$$

$$u\left(1-\frac{u}{b}\right)\frac{d^2\bar{\Psi}}{du^2}-\left[\frac{a+1}{b}+u-c\right]\frac{d\bar{\Psi}}{dz}-a\;\bar{\Psi}=0\;.$$

Simplificando la notación, cambiamos la variable de u a z y la función de $\bar{\Psi}$ a Ψ. Además, haciendo tender $b\to\infty$ obtenemos:

$$\boxed{z\,\Psi''(z)+(c-z)\;\Psi'(z)-a\Psi(z)=0\;.} \tag{15.24}$$

La anterior es conocida como *la ecuación hipergeométrica confluente* y su solución se denota por ${}_1F_1\,(a,c\,;z)$. Esta ecuación tiene una singularidad fuchsiana en $z=0$ y una singularidad esencial en $z=\infty$. Una de las soluciones en torno a $z=0$ es:

$$\lim_{b\to\infty}{}_2F_1\left(a,b,c\,;\frac{z}{b}\right)=\lim_{b\to\infty}\left[1+\frac{ab}{1c}\frac{z}{b}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\times2\times c(c+1)}\frac{z^2}{b^2}+\cdots\right]\;,$$

$${}_1F_1\,(a,c\,;z)=1+\frac{a}{c}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}+\cdots\;. \tag{15.25}$$

Esta serie es conocida como *la serie hipergeométrica confluente*. Tiene radio de convergencia infinito siempre que $c\neq0,-1,-2,-3,\cdots$. La otra solución de la ecuación diferencial es:

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^{1-c}{}_2F_1\left(a-c+1,b-c+1,2-c\,;\frac{z}{b}\right)=z^{1-c}\;{}_1F_1\,(a-c+1,2-c\,;z)\;\;, \tag{15.26}$$

con $c\neq1,2,3\cdots$.

Proposiciones

a) $e^z={}_1F_1\,(a,a\,;z)$.

b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(z)=z\;{}_1F_1\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\,;-z^2\right)$.

c) ${}_1F_1\,(a,c\,;z)=\frac{1}{B(a,c-a)}\int_0^1(1-t)^{c-a-1}t^{a-1}e^{zt}\,dt$.

d) ${}_1F_1\,(a,c\,;z)=e^z\;{}_1F_1\,(c-a,c\,;-z)$.

Demostraciones

a) Directa a partir de la definición dada en (15.26).

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(z) &= \int_0^z e^{-t^2}\,dt = \int_0^z \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \cdots\right)\,dt\ , \\
&= z - \frac{z^3}{3\times 1!} + \frac{z^5}{5\times 2!} - \frac{z^7}{7\times 3!} + \cdots\ , \\
&= z\ \left(1 - \frac{1/2}{3/2}\frac{z^2}{1!} + -\frac{1/2\times 3/2}{3/2\times 5/2}\frac{z^4}{2!} + \cdots\right)\ , \\
&= z\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -z^2\right)\ .
\end{aligned}
$$

c) y d) Tarea.