

# Capítulo 18

## Diversos tipos de funciones cilíndricas

La ecuación de Bessel, que estudiamos en el capítulo anterior, da origen a una serie de funciones que genéricamente denominamos “cilíndricas”, debido a que la ecuación de Bessel aparece de modo natural en diversos problemas físicos con simetría cilíndrica, pues corresponde a la parte radial del Laplaciano en dichas coordenadas. Una de ellas es la función de Bessel  $J_\alpha(z)$ , que estudiamos en el capítulo anterior. En éste revisaremos brevemente algunas otras funciones y sus propiedades.

### 18.1 Segunda solución de la ecuación de Bessel

Consideremos la ecuación de Bessel, con solución centrada en  $z = 0$ . Escojamos además  $n = 0$ :

$$f'' + \frac{1}{z}f' + f = 0 . \quad (18.1)$$

Esta ecuación hipergeométrica tiene dos soluciones linealmente independientes, una de las cuales es la ya conocida  $J_0(z)$ . Determinemos ahora la segunda solución. Proponemos una solución de la forma

$$f(z) = J_0(z) \int_0^z u(t) dt . \quad (18.2)$$

Luego

$$\frac{1}{z}f'(z) = \frac{1}{z}J_0'(z) \int_0^z u(t) dt + \frac{1}{z}J_0(z)u(z) , \quad (18.3)$$

$$f''(z) = J_0''(z) \int_0^z u(t) dt + 2J_0'(z)u(z) + J_0(z)u'(z) . \quad (18.4)$$

Reemplazando en (18.1), y puesto que  $J_0(z)$  es solución de ella,

$$u'(z)J_0(z) + u(z) \left[ 2J_0'(z) + \frac{1}{z}J_0(z) \right] = 0 ,$$

esto es,

$$\begin{aligned} u'(z) &= - \left[ \frac{2J_0'(z)}{J_0(z)} + \frac{1}{z} \right] u(z) , \\ u(z) &= C \exp \left[ - \int_0^z \left( \frac{2J_0'(t)}{J_0(t)} + \frac{1}{t} \right) dt \right] , \\ u(z) &= \exp \left[ - \ln J_0^2(z) - \ln z \right] , \end{aligned}$$

es decir,

$$u(z) = \frac{1}{zJ_0^2(z)} = \frac{1}{z} \left( 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\nu} z^{2\nu} \right) . \quad (18.5)$$

La solución linealmente independiente a  $J_0(z)$  es entonces

$$N_0(z) = J_0(z) \int_0^z \frac{dt}{tJ_0^2(t)} , \quad (18.6)$$

lo que reescribimos como

$$N_0(z) = J_0(z) \left[ \ln z + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{2\nu} z^{2\nu} \right] = J_0(z) \ln z + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \left( \frac{z}{2} \right)^{2\nu} .$$

Reemplazando en la ecuación diferencial (18.1) determinamos los coeficientes  $C_{2\nu}$ . Para ello, notamos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} N_0'(z) &= \frac{1}{z} J_0'(z) \ln z + \frac{1}{z^2} J_0(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \frac{2\nu}{2} \left( \frac{z}{2} \right)^{2\nu-2} \frac{1}{2} \\ N_0''(z) &= J_0''(z) \ln z + 2J_0'(z) \frac{1}{z} - J_0(z) \frac{1}{z^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \frac{2\nu(2\nu-1)}{4} \left( \frac{z}{2} \right)^{2\nu-2} . \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de potencias iguales de  $z$ , se tiene la relación de recurrencia

$$c_{2\nu} = -\frac{c_{2\nu-2}}{\nu^2} - \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \frac{1}{\nu} , \quad \nu \geq 2 . \quad (18.7)$$

Tomamos  $c_0 = 0$ , y notamos que sólo nos interesan los índices pares. Entonces

$$\begin{aligned} c_2 &= 1 , \\ c_4 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) . \end{aligned}$$

**Afirmación**

$$c_{2\nu} = \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu} \right) . \quad (18.8)$$

**Demostración** La demostración es fácil por inducción. Suponiendo que la afirmación es cierta para  $\nu = n$ , podemos calcular

$$c_{2n+2} = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \frac{(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \frac{1}{n+1}$$

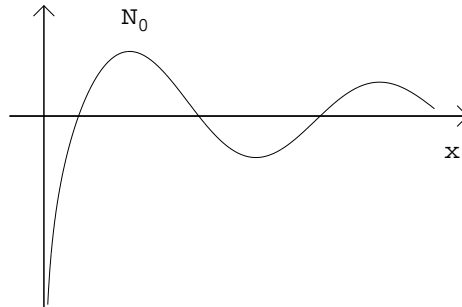
$$c_{2n+2} = -\frac{(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

q.e.d.

Con este resultado, podemos escribir una solución linealmente independiente de  $J_0(x)$  en la forma:

$$N_0(z) = J_0(z) + \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{1}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^6 - \dots \quad (18.9)$$

Gráficamente:



Análogamente, asociadas a las funciones de índices superiores  $J_n(z)$ , será posible encontrar la segunda solución,  $N_n(z)$ .

## 18.2 Funciones de Hankel

En el capítulo anterior, vimos que las funciones de Bessel se pueden representar en la forma integral

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(z \operatorname{sen} \phi - n\phi)] d\phi.$$

Hagamos el cambio de variable  $\phi = -\psi$ , de modo que

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i(z \operatorname{sen} \psi - n\psi)] d\psi.$$

Consideremos ahora una generalización de lo anterior al plano complejo, la función

$$\Phi(z) = \int_C e^{-iz \operatorname{sen} s} e^{i\alpha s} ds . \quad (18.10)$$

Sea

$$g(s) = e^{i\alpha s} . \quad (18.11)$$

Entonces

$$g'' + \alpha^2 g = 0 . \quad (18.12)$$

Sea además

$$f(z, s) = e^{-iz \operatorname{sen} s} , \quad (18.13)$$

de modo que

$$z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z \frac{\partial f}{\partial z} + z^2 f = -\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} . \quad (18.14)$$

**Afirmación**  $\Phi(z)$  satisface la ecuación de Bessel (bajo ciertas restricciones),

$$z^2 \Phi'' + z \Phi' + (z^2 - \alpha^2) \Phi = 0 . \quad (18.15)$$

**Demostración** Si (18.15) se satisface, entonces

$$0 = \int_C \left[ z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z \frac{\partial f}{\partial z} + (z^2 - \alpha^2) f \right] g .$$

Con (18.14),

$$\begin{aligned} 0 &= -\alpha^2 \int_C f g - \int_C \left( \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right) g \\ &= -\alpha^2 \int_C f g + \int_C \frac{\partial f}{\partial s} g' - \left[ \frac{\partial f}{\partial s} g \right] \Big|_C \\ &= -\alpha^2 \int_C f g - \int_C f g'' + \left[ f g' - \frac{\partial f}{\partial s} g \right] \Big|_C \\ &= - \int_C f (g'' + \alpha^2 g) + \left[ f g' - \frac{\partial f}{\partial s} g \right] \Big|_C . \end{aligned}$$

Con (18.12),

$$0 = \left[ f g' - \frac{\partial f}{\partial s} g \right] \Big|_C .$$

Por lo tanto,  $\Phi$  es solución de la ecuación de Bessel si  $f$  y  $\partial f/\partial s$  son despreciables en el contorno de integración  $C$ .

q.e.d.

Sean ahora  $z = x > 0$ ,  $s = s_1 + is_2$ ,  $s_{1,2} \in \mathbb{R}$ . En este caso,

$$\text{sen } s = \text{sen } s_1 \cosh s_2 + i \cos s_1 \sinh s_2 .$$

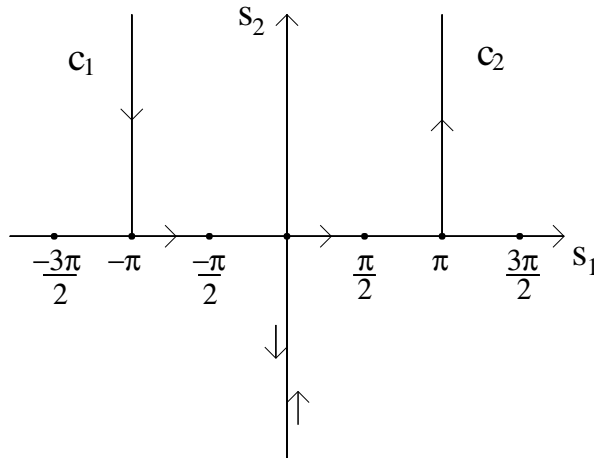
Considerando la afirmación anterior, ¿en qué parte del plano  $(\text{Re } s, \text{Im } s)$  tenemos  $|f(x, s)| = |e^{ix \text{sen } s}| \rightarrow 0$ ? Esto es, buscamos un contorno  $C$  tal que

$$\text{Re}(-ix \text{sen } s) = x \cos s_1 \sinh s_2 \longrightarrow -\infty .$$

Esta condición equivale a

$$\begin{aligned} \sinh s_2 &\longrightarrow -\infty && \text{si } \cos s_1 > 0 , \\ \sinh s_2 &\longrightarrow \infty && \text{si } \cos s_1 < 0 . \end{aligned} \tag{18.16}$$

Escojamos los contornos de integración:



Sobre estos contornos,  $f$  y  $\partial f/\partial s$  son despreciables en infinito, y estamos en condiciones de definir dos nuevas funciones, soluciones de la ecuación diferencial de Bessel:

**Definición 18.1** *Funciones de Hankel*

$$H_\alpha^{(1,2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_{1,2}} e^{-ix \text{sen } s} e^{i\alpha s} ds , \quad x > 0 \tag{18.17}$$

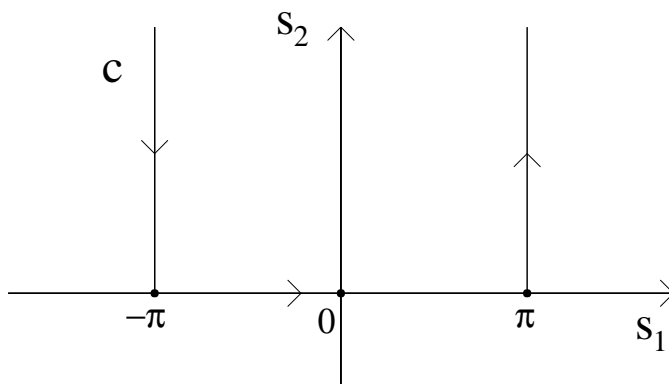
Consideremos el caso particular  $\alpha = n$ , y la expresión

$$I(x) = H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) \tag{18.18}$$

De (18.17),

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_C e^{-ix \text{sen } s} e^{i\alpha s} ds ,$$

con



Puesto que

$$e^{in(s+2\pi)} = e^{ins} ,$$

$$\text{sen}(s + 2\pi) = \text{sen } s ,$$

las integraciones sobre los segmentos verticales de  $C$  se anulan entre sí. Se tiene entonces

$$H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \text{sen } \phi} e^{in\phi} d\phi .$$

Se siguen las siguientes relaciones entre las funciones cilíndricas que hemos examinado:

$$J_n = \frac{1}{2} [H_n^{(1)} + H_n^{(2)}] , \quad (18.19)$$

$$N_n = \frac{1}{2i} [H_n^{(1)} - H_n^{(2)}] , \quad (18.20)$$

y a la inversa,

$$H_n^{(1)} = J_n + iN_n , \quad (18.21)$$

$$H_n^{(2)} = J_n - iN_n . \quad (18.22)$$