

Capítulo 2

Series de Fourier

Sea f una función arbitraria en $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$, i.e.

$$[-\pi, \pi] \xrightarrow{f} \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty .$$

Sea $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ un conjunto de funciones ortonormales en $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$, definidas como $\varphi_\nu(t) = \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}}$.

Los *coeficientes de Fourier*, $C_\nu = (\varphi_\nu | f)$, satisfacen

$$\sum_{\nu} |C_\nu|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < \infty \quad (\text{Desigualdad de Bessel})$$

Luego

$$\lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} C_\nu = 0 . \quad (2.1)$$

Necesitaremos un par de resultados preliminares. Observemos primero que

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu\mu} &= e^{-in\mu} (1 + e^{i\mu} + e^{i2\mu} + \dots + e^{i2n\mu}) \\ &= \frac{1}{a^{2n}} (1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{4n}) \quad \text{con } a = e^{i\mu/2} \\ &= \frac{1}{a^{2n}} \left[\frac{a^{4n+2} - 1}{a^2 - 1} \right] = \frac{a^{2n+1} - a^{-2n+1}}{a - a^{-1}} . \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu\mu} = \frac{\text{sen}[(2n+1)\mu/2]}{\text{sen}(\mu/2)} . \quad (2.2)$$

Por otra parte,

$$\int_0^\pi \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu\mu} d\mu = \int_0^\pi \left[1 + 2 \sum_{\nu=1}^n \cos(\nu\mu) \right] d\mu = \pi .$$

Usando (2.2)

$$\pi = \int_0^\pi \frac{\text{sen}[(2n+1)\mu/2]}{\text{sen}(\mu/2)} d\mu .$$

Tomando $\nu = \mu/2$:

$$\pi f(t) = 2 \int_0^{\pi/2} f(t) \frac{\text{sen}[(2n+1)\nu]}{\text{sen} \nu} d\nu . \quad (2.3)$$

Teorema 2.1 Sea $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, entonces su serie de Fourier

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (\varphi_\nu | f) \varphi_\nu(t)$$

converge y representa a $f(t)$ (convergencia punto a punto) en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Demostración Considerar la suma parcial

$$S_n(t) = \sum_{\nu=-n}^n C_\nu \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}} .$$

Los coeficientes de Fourier son

$$C_\nu = (\varphi_\nu | f) = \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{-i\nu t'}}{\sqrt{2\pi}} f(t') dt'$$

$$2\pi S_n(t) = 2\pi \sum_{\nu=-n}^n C_\nu \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}} = 2\pi \sum_{\nu=-n}^n \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{-i\nu t'}}{\sqrt{2\pi}} f(t') dt' \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$2\pi S_n(t) = \int_{-\pi}^\pi f(t') \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu(t-t')} dt'$$

Sea $u = t' - t$ ($du = dt'$). Se tiene:

$$2\pi S_n(t) = \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(u+t) \sum_{\nu=-n}^n e^{-i\nu u} du .$$

Puesto que $\sum_{\nu=-n}^n e^{-i\nu n} = \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu n}$ [ver (2.2), por ejemplo], y que, siendo f periódica,

$$f(u \pm 2\pi) = f(u) \quad \forall u \in \mathbb{R} ,$$

resulta

$$2\pi S_n(t) = \int_{-\pi}^\pi f(u+t) \sum_{\nu'=-n}^n e^{i\nu' u} du$$

$$\pi S_n(t) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 f(t+u) \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu u} du + \frac{1}{2} \int_0^\pi f(t+u) \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu u} du$$

Haciendo en la primera integral el cambio de variables $u = -2v$, y en la segunda el cambio $u = 2v$:

$$\pi S_n(t) = \frac{1}{2}(-2) \int_{\pi/2}^0 f(t-2v) \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu 2v} dv + \frac{1}{2}(2) \int_0^{\pi/2} f(t+2v) \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu 2v} dv .$$

Usando (2.2) y (2.3):

$$\pi [S_n(t) - f(t)] = \int_0^{\pi/2} [f(t-2v) + f(t+2v) - 2f(t)] \frac{\text{sen}[(2n+1)v]}{\text{sen } v} dv . \quad (2.4)$$

Definamos ahora

$$\psi_t(v) = f(t+2v) + f(t-2v) - 2f(t) \quad v \in [0, \pi/2] .$$

Sea

$$g(v) = \begin{cases} \frac{\psi_t(v)}{\text{sen } v} & v \in [0, \pi/2] \\ 0 & v \in [-\pi, 0] \\ 0 & v \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

$g(v)$ es acotada en $[-\pi, \pi]$ y, de hecho, se puede mostrar que pertenece a $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$. Podemos reescribir (2.4):

$$\pi [S_n(t) - f(t)] = \int_{-\pi}^{\pi} g(v) \text{sen}[(2n+1)v] dv = \sqrt{2\pi} \text{Im}(\varphi_{2n+1} | g) .$$

Con (2.1),

$$\pi [S_n(t) - f(t)] = \sqrt{2\pi} \text{Im}(\varphi_{2n+1} | g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = f(t) ,$$

o sea

$$f(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} C_\nu \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}} .$$

q.e.d.

Sabemos, de (2.1), que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \implies \lim_{\nu \rightarrow \infty} C_\nu = 0 .$$

Supongamos que $f \in \mathcal{C}_o[-\pi, \pi]$ y que f' es continua, tal que $\int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2 < \infty$. Entonces de la definición de los coeficientes de Fourier:

$$\sqrt{2\pi} C_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\nu t} dt \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

Si integramos por partes:

$$\sqrt{2\pi} C_\nu = \left(f(t) \frac{e^{-i\nu t}}{-i\nu} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) + \frac{1}{i\nu} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-i\nu t} dt.$$

Observando que el segundo término no es sino el coeficiente de Fourier de f' , tenemos

$$\nu C_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Análogamente, si $f, f' \in \mathcal{C}_o[-\pi, \pi]$ y f'' es continua, tal que $\int_{-\pi}^{\pi} |f''|^2 < \infty$, entonces

$$\nu^2 C_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Vale decir, cuanto más derivable es la función f , tanto más rápido tienden a cero sus coeficientes de Fourier. Más aún, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.2 (Sin demostración) Si $f \in \mathcal{C}$ y f tiene discontinuidades “mansas” (saltos finitos), entonces los coeficientes de Fourier C_ν decrecen como $1/\nu$.

Si $f \in \mathcal{C}_o$, $f' \in \mathcal{C}$ y f' tiene discontinuidades “mansas”, entonces los coeficientes de Fourier C_ν decrecen como $1/\nu^2$.

Etcétera.

El teorema anterior muestra que la serie de Fourier converge más rápidamente mientras mejor comportamiento analítico tenga la función f . En el caso de funciones infinitamente derivables, los coeficientes de Fourier exhiben decaimientos más fuertes que cualquier polinomio ($C_\nu \simeq 1/\nu!$, por ejemplo).

Teorema 2.3 Si $f'' \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f .

Demostración Sean $C_\nu = (\varphi_\nu | f)$ los coeficientes de Fourier de f . Como $f' \in \mathcal{C}_o$, entonces $\nu^2 C_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \pm\infty} 0$, luego existe un N tal que para todo $|\nu| > N$ se tiene

$$\begin{aligned} |\nu^2 C_\nu| &< 1 \\ \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} C_\nu \varphi_\nu &= \sum_{|\nu| \leq N} C_\nu \varphi_\nu + \sum_{|\nu| > N} C_\nu \varphi_\nu \end{aligned}$$

Sea

$$M = \max_{t \in [-\pi, \pi]} \sum_{|\nu| \leq N} C_\nu \varphi_\nu.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} C_\nu \varphi_\nu &\leq \left| \sum_{|\nu| \leq N} C_\nu \varphi_\nu + \sum_{|\nu| > N} C_\nu \varphi_\nu \right| \leq \left| \sum_{|\nu| \leq N} C_\nu \varphi_\nu \right| + \left| \sum_{|\nu| > N} C_\nu \varphi_\nu \right| \\
 &\leq M + \sum_{|\nu| > N} |C_\nu| |\varphi_\nu| = M + \sum_{|\nu| > N} |C_\nu| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
 &\leq M + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|\nu| > N} |C_\nu| < M + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|\nu| > N} \frac{1}{\nu^2}
 \end{aligned}$$

Pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

donde $\zeta(x)$ es la función zeta de Riemann. Así:

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} C_\nu \varphi_\nu < M + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Luego existe un mayorante convergente independiente de t , y por lo tanto hay convergencia uniforme.

q.e.d.

Proposición 2.1 (Sin demostración) Si $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ y $f(t) \in \mathbb{R}$, entonces f se puede expandir en una serie trigonométrica:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) + B_n \operatorname{sen}(nt),$$

con los coeficientes dados por

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\
 B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt
 \end{aligned}$$

Resultados útiles

Escribamos la serie de Fourier

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_\nu e^{i\nu x}, \quad C_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\nu t} dt.$$

1) $f(x + 2\pi) = f(x)$

La expansión de Fourier de $f(x)$ implica su extensión periódica a \mathbb{R} .

2) Si $f(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$,

$$C_{-\nu} = C_{\nu}^* .$$

3) Poniendo

$$e^{\pm i\nu x} = \cos(\nu x) \pm i \operatorname{sen}(\nu x) ,$$

obtenemos la expansión alternativa

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [A_{\nu} \cos(\nu x) + B_{\nu} \operatorname{sen}(\nu x)] ,$$

con

$$A_{\nu} = C_{\nu} + C_{-\nu} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(\nu t) dt ,$$

$$B_{\nu} = i(C_{\nu} - C_{-\nu}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(\nu t) dt .$$

Además:

$$f(x) = f(-x) \implies B_{\nu} = 0 ,$$

$$f(x) = -f(-x) \implies A_{\nu} = 0 ,$$

de modo que esta forma de la expansión es útil cuando f tiene paridad definida.

4) Para expandir una función F de período L , definimos una función f de período 2π por

$$F(u) = f\left(2\pi \frac{u}{L}\right) .$$

Así, $F(u + L) = F(u)$. Podemos expandir en serie de Fourier la función f , obteniéndose finalmente:

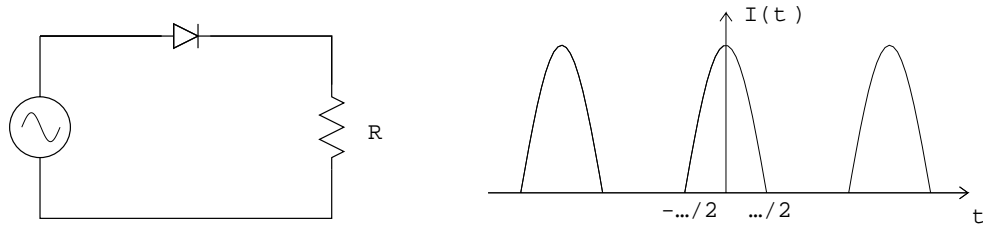
$$F(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_{\nu} e^{iq_{\nu}u} = F(u + L) , \quad \text{con } q_{\nu} = \frac{2\pi}{L}\nu ,$$

$$C_{\nu} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} F(t) e^{-iq_{\nu}t} dt .$$

Aplicaciones

1) Rectificador de “media” onda.

Consideremos el siguiente circuito eléctrico, y la forma de la corriente en función del tiempo que por él circula:



$I(t)$ es par, luego $B_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$$I(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) ,$$

con

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} I(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \frac{2}{\pi}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cos(nt) dt = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar, } n \neq 1 \\ \frac{-2(-1)^{n/2}}{\pi(n^2 - 1)} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

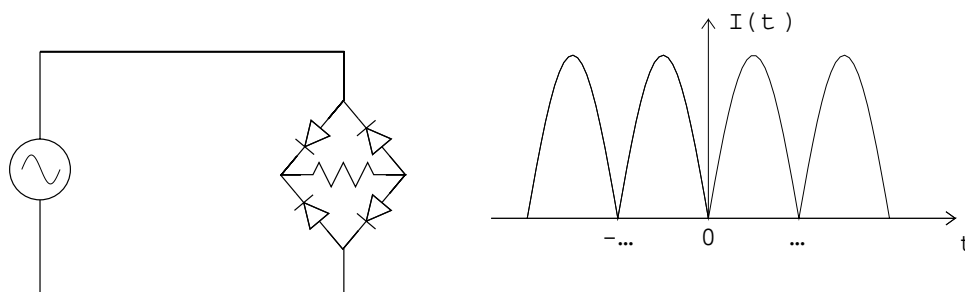
Luego

$$I(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{\cos t}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(2t)}{1 \cdot 3} - \frac{\cos(4t)}{3 \cdot 5} + \dots \right]$$

$$I(0) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots \right] \quad (2.5)$$

En general, $A_n \rightarrow 0$ como $1/n^2$, como corresponde a una función $I(t)$ cuya primera derivada tiene discontinuidades mansas.

2) Rectificador de onda completa.



En este caso, $I(t) = |\text{sen } t|$ es par, y se tiene:

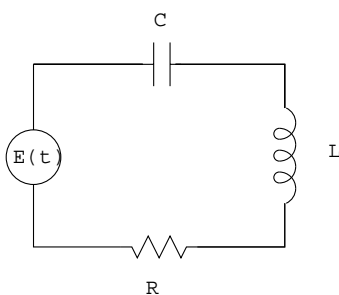
$$A_0 = \frac{4}{\pi}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } t \cos(nt) dt \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ \frac{-4}{\pi(n^2 - 1)} & n \text{ par} \end{cases}$$

e

$$I(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos(2t)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4t)}{3 \cdot 5} + \dots \right]$$

3) Circuito resonante *RLC*.



Consideremos ahora $E(t)$ una función arbitraria pero periódica de período T . La corriente $I(t)$ satisface

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt} .$$

$E(t)$ se puede desarrollar en serie de Fourier:

$$E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n e^{in\omega t} , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} ,$$

donde

$$E_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{-in\omega t} dt .$$

Estos coeficientes se pueden calcular si $E(t)$ es una función conocida. Escribiendo

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega n t} ,$$

encontramos, reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(-n^2 \omega^2 L + in\omega R + \frac{1}{C} \right) C_n - in\omega E_n \right] e^{in\omega t} = 0 .$$

Siendo $\{e^{in\omega t}\}_n$ un conjunto linealmente independiente, cada coeficiente de la suma debe ser nulo, luego:

$$C_n = \frac{i \frac{n\omega}{L}}{\frac{1}{LC} - n^2\omega^2 + i \frac{n\omega R}{L}} E_n .$$

Aquí, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ es la frecuencia natural del sistema.

4) Conducción del calor.

Consideremos una barra de longitud L . Su temperatura es una cierta función de la distancia x a uno de sus extremos y del tiempo, $U(x, t)$. Supongamos que en los extremos la temperatura es siempre nula:

$$U(0, t) = U(L, t) = 0$$

y que inicialmente el perfil de temperatura es:

$$U(x, 0) = x(L - x) .$$

La ecuación que rige la evolución de la temperatura es:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} ,$$

donde κ es la constante de conducción térmica. Al separar variables:

$$U(x, t) = X(x)T(t) ,$$

obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\lambda^2 \kappa T , \\ \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\lambda^2 X , \end{aligned}$$

donde λ es una constante. Las soluciones generales de estas ecuaciones son:

$$T(t) = \bar{C} e^{-\kappa \lambda^2 t} \quad \text{y} \quad X(x) = \bar{A} \cos(\lambda x) + \bar{B} \text{sen}(\lambda x) ,$$

de modo que

$$U(x, t) = [A \cos(\lambda x) + B \text{sen}(\lambda x)] e^{-\kappa \lambda^2 t} .$$

Imponiendo la condición de borde $U(0, t) = 0$:

$$A = 0 .$$

De $U(L, t) = 0$, en tanto,

$$\begin{aligned} \text{sen}(\lambda L) &= 0 , \\ \lambda_m &= \frac{m\pi}{L} , \quad m \in \mathbb{N} . \end{aligned}$$

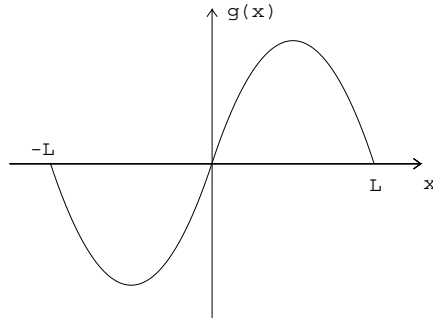
La solución más general es entonces:

$$U(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-\kappa \lambda_m^2 t} \operatorname{sen}(\lambda_m x) .$$

Ahora consideramos las condiciones iniciales:

$$U(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = x(L-x) .$$

Como esta serie es una función impar, consideramos la extensión periódica impar de la función $g(x)$ al intervalo $[-L, L]$, de modo que los coeficientes B_m correspondan a los coeficientes de Fourier de $g(x)$:



$$B_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 2 \int_0^L x(L-x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{4L^2}{m^3 \pi^3} (-1)^{m+1}$$

$$U(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{4L^2}{\pi^3} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\kappa m^2 \pi^2 t}{L^2}} .$$

En particular,

$$U(x, t) \xrightarrow[t \gg t_0 = \frac{L^2}{\kappa \pi^2}]{} \frac{4L^2}{\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-t/t_0} .$$

5) Resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{2.6}$$

para el interior del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, con la condición de borde $U(\rho = 1, \phi) = \psi(\phi)$.

La solución a (2.6) se puede plantear como

$$U(x, y) = \operatorname{Re}\{f(z)\},$$

donde $f(x)$ es una función holomorfa en \mathbb{C} . Por tanto, podemos escribir

$$f(z) = f(x + iy) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n ,$$

y consideremos

$$c_n = a_n - ib_n .$$

Cada término de la expansión anterior satisface (2.6). En efecto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z^n &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (x + iy)^n \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [n(x + iy)^{n-1}] + \frac{\partial}{\partial y} [in(x + iy)^{n-1}] \\ &= n(n-1)(x + iy)^{n-2} - n(n-1)(x + iy)^{n-2} = 0 . \end{aligned}$$

Escribamos $U(x, y)$ en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - ib_n) r^n e^{in\phi} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - ib_n) r^n (\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n [a_n \cos(n\phi) + b_n \operatorname{sen}(n\phi)] . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Imponiendo la condición de borde:

$$\psi(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\phi) + b_n \operatorname{sen}(n\phi) .$$

Por lo tanto, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de $\psi(\phi)$. Vale decir, la solución de una ecuación de Laplace en dos dimensiones se puede escribir en términos de una expansión de Fourier.

Fenómeno de Gibbs

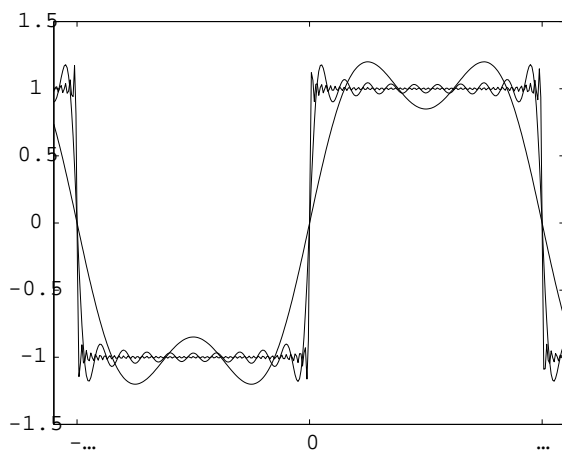
Consideremos la onda cuadrada

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0, \pm\pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Su expansión en serie de Fourier se obtiene fácilmente, encontrándose:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \operatorname{sen}[(2l+1)x] .$$

Observamos que los coeficientes decaen como $b_n \simeq 1/n$, en concordancia con el teorema demostrado anteriormente (pág. 20). En la siguiente figura presentamos la función $f(x)$ y su aproximación por sumas parciales de Fourier, con $n = 2$, $n = 10$ y $n = 50$ términos.

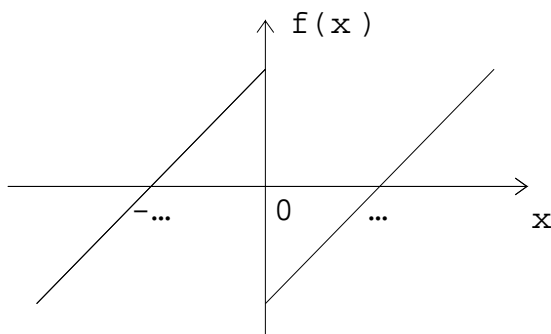


Se observa que hay buena convergencia con 10 términos, y el resultado es casi perfecto con 50, salvo ciertas oscilaciones en los puntos de discontinuidad, oscilaciones que *no* se amortiguan cuando el número de términos va a infinito. Sin embargo, como la suma parcial $S_N(x)$ converge punto a punto al valor esperado $f(x)$, las oscilaciones no amortiguadas deben necesariamente limitarse a una vecindad cada vez menor en torno a los puntos de discontinuidad, de modo que cualquier $x \neq l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, quede fuera de tal vecindad para N suficientemente grande.

Este fenómeno se conoce como *fenómeno de Gibbs*, y es consecuencia de la imposibilidad de aproximar uniformemente por funciones continuas una función discontinua.

Para estudiarlo con más detalle, consideremos la función “diente de sierra”:

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0 \\ -\pi - x & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$



Su expansión de Fourier es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) .$$

Y la suma de los N primeros términos:

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) .$$

Si $x \rightarrow 0$, los primeros términos de la suma se hacen despreciables. Para valores grandes de n , en tanto, el sumando varía lentamente, y se puede reemplazar la suma por una integral. Por lo tanto, en el límite $N \gg 1$, $x \ll 1$ podemos escribir

$$f_N(x) \simeq \int_0^N dn \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) = 2 \int_0^{Nx} dt \frac{\operatorname{sen} t}{t} .$$

Definiendo la función *seno integral*

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x dt \frac{\operatorname{sen} t}{t} , \quad (2.9)$$

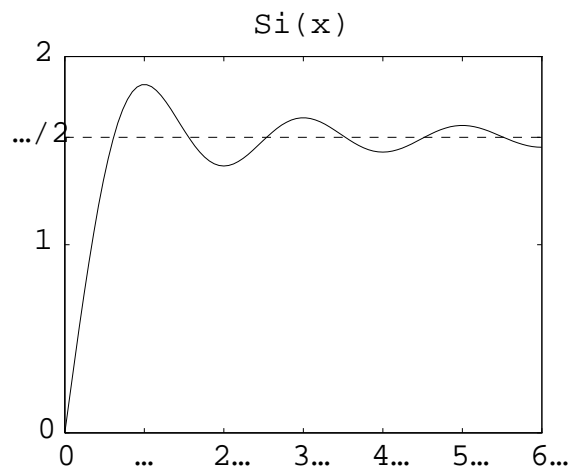
se sigue que

$$f_N(x) = 2 \operatorname{Si}(Nx) .$$

Es claro de (2.9) que $\operatorname{Si}(0) = 0$ y $\operatorname{Si}(\infty) = \pi/2$. Además, $\operatorname{Si}(x)$ posee extremos dados por

$$0 = \frac{\partial \operatorname{Si}}{\partial x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \\ x = n\pi$$

Así, como $\operatorname{sen} t/t$ oscila amortiguándose para $t \rightarrow \infty$, se espera que $\operatorname{Si}(x)$ igualmente oscile cuando x crece, pero convergiendo a $\pi/2$. Sus extremos en $x = (2n+1)\pi$ deben ser máximos (contribuciones de área positiva de $\operatorname{sen} t/t$), y sus extremos en $x = 2n\pi$ deben ser mínimos (contribuciones de área negativa de $\operatorname{sen} t/t$). El primer máximo, en $x = \pi$, es el máximo absoluto (ver figura).



Algunos valores característicos:

$$\begin{aligned} \text{Si}(\pi) &\simeq 1.852 \quad (\text{Primer máximo, absoluto}) \\ \text{Si}(2\pi) &\simeq 1.418 \quad (\text{Primer mínimo}) \\ \text{Si}(3\pi) &\simeq 1.675 \quad (\text{Segundo máximo}) \end{aligned}$$

De estos resultados se desprende que:

- a) $f_N(0) = 0$
 b) $f_N(x) \xrightarrow{x \gg 1/N} \pi \simeq 3.14159$
 c) $f_N(x)$ tiene máximos en $(2n+1)\pi/N$, por ejemplo:

$$\begin{aligned} f_N\left(\frac{\pi}{N}\right) &\simeq 3.704 \quad (\text{Primer máximo, absoluto}) \\ f_N\left(\frac{3\pi}{N}\right) &\simeq 3.350 \quad (\text{Segundo máximo}) \end{aligned}$$

- d) $f_N(x)$ tiene mínimos en $2n\pi/N$:

$$f_N\left(\frac{2\pi}{N}\right) \simeq 2.836 \quad (\text{Primer mínimo})$$

De este modo, la función $f_N(x)$ oscila en tanto se tenga $x \simeq O(1/N)$. El primer máximo implica sobrepasar el valor límite en un 18%, y el segundo sólo en un 7%. Toda esta estructura está en una pequeña vecindad de $x = 0$, vecindad cuyo ancho va a cero si $N \rightarrow \infty$.

Esto explica el fenómeno de Gibbs. Aun cuando hemos considerado la función (2.8), es fácil convencerse de que nuestros razonamientos son generales, y que podemos aplicarlos a cualquier función en torno a una discontinuidad finita de la misma.

Integración de series de Fourier

Sea $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ y

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx) .$$

Sea

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt .$$

Entonces $F(x)$ es continua y acotada. Además es periódica si $F(-\pi) = F(\pi)$, i.e.

$$0 = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \pi a_0 ,$$

es decir,

$$a_0 = 0 .$$

Siendo F periódica, es expandible en serie de Fourier:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx) ,$$

con

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx) dx \\ &= F(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{n\pi} F'(x) dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = -\frac{b_n}{n} , \quad n \neq 0 . \end{aligned}$$

Si $n = 0$,

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = xF(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} xf(x) dx .$$

Análogamente,

$$B_n = \frac{a_n}{n} .$$

Tenemos pues el siguiente teorema:

Teorema 2.4 Sea $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ con un desarrollo de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

($a_0 = 0$). Entonces

$$\int_{-\pi}^x f(x) dx = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} nx - \frac{b_n}{n} \cos nx ,$$

con

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} xf(x) dx .$$

Si $a_0 \neq 0$, basta considerar $g(x) = f(x) - a_0/2$.