Capítulo 3

Transformada de Fourier

3.1 Definiciones

Sea $f \in \mathcal{C}\,[-L, L]$. Entonces

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \qquad \text{con } -L \leq x \leq L \ , \tag{3.1}$$

donde

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx \ , \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \ . \tag{3.2}$$

Tomemos el límite cuando $L \to \infty$. Si definimos $k = \pi n/L$, vemos que, en este límite, k se vuelve continuo. Por otra parte,

$$\Delta k = \frac{\Delta n \pi}{L} = \frac{\pi}{L} \ , \qquad \text{pues } \Delta n = 1.$$

Definimos

$$C_L(k) = \frac{L}{\pi} C_n \ .$$

Usando las anteriores definiciones en las ecuaciones (3.1) y (3.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{Lk/\pi=-\infty}^{\infty} C_L(k) \frac{\pi}{L} e^{ikx} \left(\frac{\Delta k L}{\pi}\right) = \sum_{Lk/\pi=-\infty}^{\infty} C_L(k) e^{ikx} \Delta k \ , \\ C_L(k) &= \frac{L}{\pi}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-ikx}\, dx \ . \end{aligned}$$

Al hacer $L \to \infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikx}\, dk \ , \\ C(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx \ . \end{aligned}$$

Definimos ahora $C(k)$ como la *transformada de Fourier* $F(k)$ de la función $f(x)$. La relación entre f y F está dada por el *teorema de reciprocidad*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx}\, dk \ , \tag{3.3a}$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx}\, dx \equiv \mathcal{F}\{f, k\} \ . \tag{3.3b}$$

Definición 3.1 *Si f es seccionalmente continua y además se cumple $\int_{-\infty}^{\infty} |\, f \,| < \infty$, entonces se dice que $f \in L^1$.*

Teorema 3.1 (Sin demostración)
Si $f \in L^1$ entonces la transformada de Fourier $F(k) = \mathcal{F}\{f, k\}$ existe y $\lim\limits_{k \to \pm\infty} F(k) = 0$.

3.2 Ejemplos

a) Una gaussiana, $f(x) = N e^{-\alpha x^2}$. Su transformada de Fourier es:

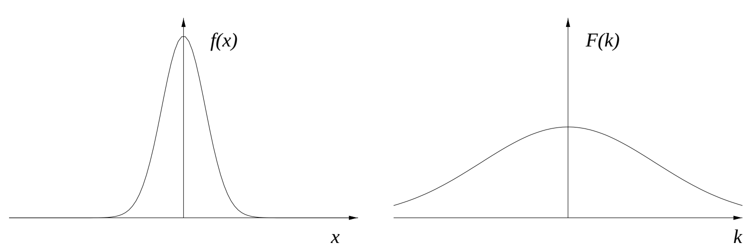
$$F(k) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, e^{ikx}\, dx = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{\alpha} x - ik/2\sqrt{\alpha})^2}\, e^{-k^2/4\alpha}\, dx \ .$$

Haciendo el cambio de variable $u = \sqrt{\alpha} x - ik/2\sqrt{\alpha}$, obtenemos

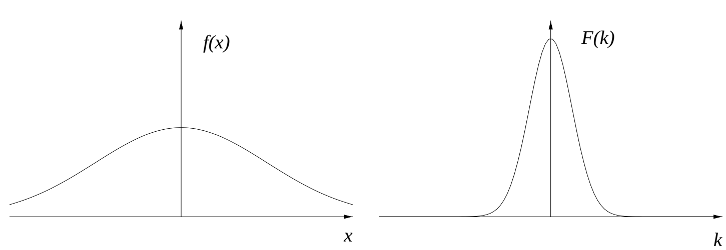
$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N}{\sqrt{\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} \int_{-\infty - ik/2\sqrt{\alpha}}^{\infty - ik/2\sqrt{\alpha}} e^{-u^2}\, du = \frac{N}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

$$F(k) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} \sqrt{\pi} = \frac{N}{\sqrt{2\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} \ ,$$

otra gaussiana. Si α es "grande":



Si α es "pequeño":

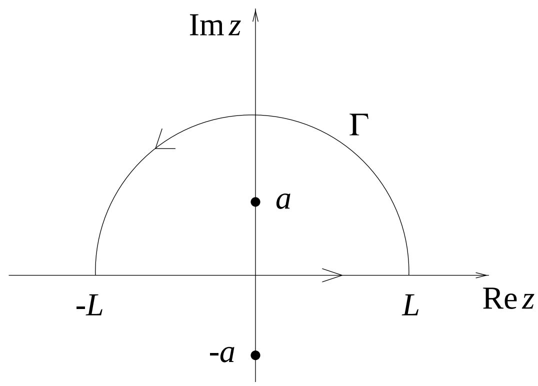


Los anchos de la función y de su transformada están en razón inversa.

b) Una función Lorentziana $f(x) = \dfrac{a}{x^2+a^2}$ con $a > 0$. La transformada de Fourier:

$$F(k) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}\, dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x+ai)(x-ai)}\, dx \ .$$

Haciendo una prolongación analítica al plano complejo de la función $f(x)$ y luego considerando el contorno cerrado de integración Γ, para el caso $k > 0$, podemos aplicar el teorema del residuo:



$$\oint_\Gamma \frac{e^{ikz}}{(z+ai)(z-ai)}\, dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}_{z=ia} = 2\pi i (z+ai) \left. \frac{e^{ikz}}{(z+ai)(z-ai)} \right|_{z=ai} = \frac{\pi}{a} e^{-ka} \ .$$

Podemos separar el contorno en dos tramos, un semicírculo y un tramo horizontal entre $-L$ y L sobre el eje real. Al tomar el límite $L \to \infty$ es fácil mostrar que la integral sobre el semicírculo tiende a cero y la integral entre $-L$ y L tiende a una integral real entre $-\infty$ y ∞, es decir

$$\oint_\Gamma \frac{e^{ikz}}{(z+ai)(z-ai)}\, dz \xrightarrow[L\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x+ai)(x-ai)}\, dx = \frac{\pi}{a} e^{-ka} \ .$$

Finalmente, nuestra transformada de Fourier resulta

$$F(k) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{a} e^{-ka} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ka} \qquad \text{para } k > 0 \ .$$

Análogamente, podemos mostrar, considerando el polo en el semiplano inferior y un contorno de integración que lo contenga, que

$$F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{ka} \qquad \text{para } k < 0 \ .$$

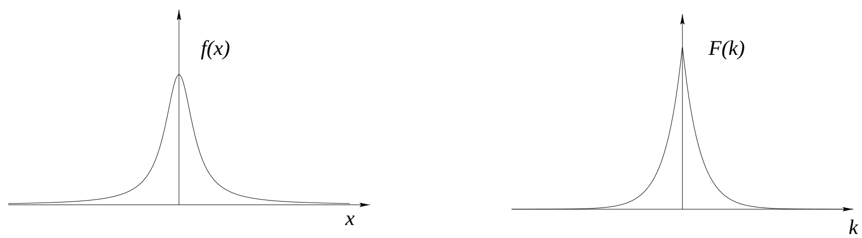
Para $k = 0$:

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ .$$

Reuniendo los resultados para los diferentes k tenemos

$$F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\,k\,|\,a}\ .$$

Graficamente:



Nuevamente, como en el caso de la Gaussiana, mientrás más ancha es la función, más angosta es su transformada, y viceversa. Observamos que:

$i)$ $f(x) \xrightarrow[|\,x\,|\to\infty]{} 0$ como $\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad F'(k)$ discontinua

$ii)$ $f(x)$ infinitamente diferenciable $\qquad F(k)$ decrece más rápido que cualquier potencia

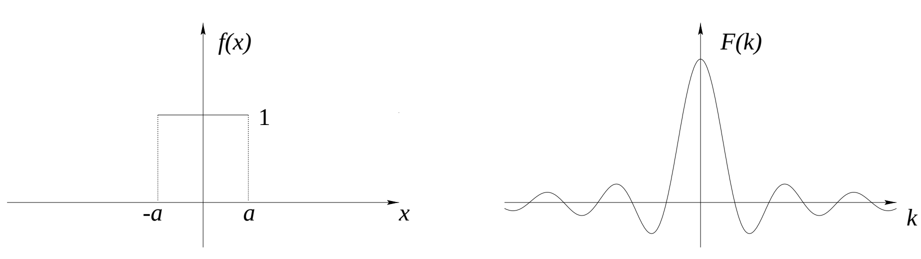
Esto coincide con los resultados generales sobre los coeficientes de Fourier del capítulo 2. Más adelante, en la sección 3.3, demostraremos el teorema análogo para transformadas de Fourier.

c) Consideremos la función, con $a > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |\,x\,| < a \\ 0 & |\,x\,| > a \end{cases}\ .$$

Su transformada de Fourier

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{ikx}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}(ka)}{k}$$



Se observa, como en los ejemplos anteriores:

$f(x)$ ancha	$F(k)$ angosta
$f(x)$ angosta	$F(k)$ ancha
$f(x)$ discontinua	$F(k) \xrightarrow[\mid k \mid\to\infty]{} 0$ como $\dfrac{1}{k}$
$f(x) \xrightarrow[\mid x \mid\to\infty]{} 0$ más rápido que cualquier potencia	$F(k)$ infinitamente diferenciable

Ejercicio Para el caso anterior, evaluar $\mathcal{F}^{-1}\{F, x\}$, y mostrar que $f(x = \pm a) = \dfrac{1}{2}$.

d) Si $g(x) \in \mathbb{R}$ y es impar, *i.e.* $g(-x) = -g(x)$, entonces

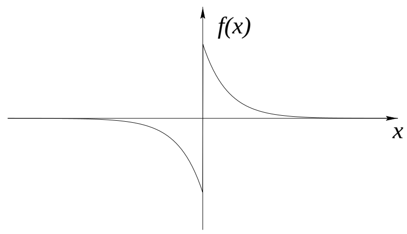
$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx}\, dx = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx \equiv iG_S(k) \ ,$$

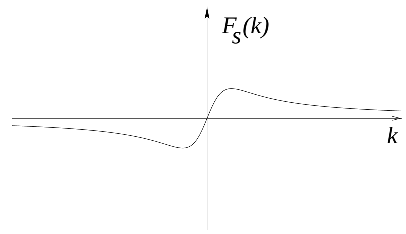
donde G_S es conocida como la *transformada seno de Fourier* de la función $g(x)$, y viene definida por

$$\boxed{G_S(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx} \tag{3.4}$$

Como ilustración de la definición anterior, sea $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\, e^{-\alpha|x|}$. Evaluemos su transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
F(k) &= iF_S(k) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \operatorname{sen}(kx)\, dx \\
&= i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-(\alpha x - ikx)}\, dx - \int_0^{\infty} e^{-(\alpha x + ikx)}\, dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-1}{\alpha - ik} e^{-(\alpha x - ikx)} \Big|_0^{\infty} - \frac{-1}{\alpha + ik} e^{-(\alpha x + ikx)} \Big|_0^{\infty} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\alpha - ik} - \frac{1}{\alpha + ik} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2ik}{\alpha^2 + k^2} \\
F(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ik}{\alpha^2 + k^2} \ .
\end{aligned}$$





$f(x)$ discontinua — $F(k) \xrightarrow[|\,k\,|\to\infty]{} 0$ como $\dfrac{1}{k}$

$f(x) \xrightarrow[|\,x\,|\to\infty]{} 0$ más rápido que cualquier potencia — $F(k)$ infinitamente diferenciable

Notemos que $F \in L^1$, pero su integral entre $-\infty$ y ∞ resulta impropia, $\mathcal{P}\!\!\int F = 0$.

Análogamente a la definición de la *transformada seno de Fourier*, si $g(x) \in \mathbb{R}$ y es par, *i.e.* $g(-x) = g(x)$, entonces

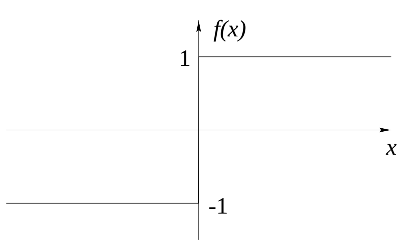
$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \cos(kx)\, dx \equiv G_C(k) \ ,$$

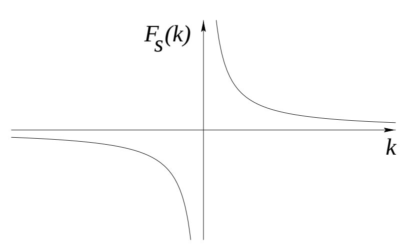
donde G_C es conocida como la *transformada coseno de Fourier* de la función $g(x)$, y viene definida por

$$\boxed{G_C(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \cos(kx)\, dx} \tag{3.5}$$

e) Consideremos ahora una función $f(x) \notin L^1$. Sea $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$. $f(x) \notin L^1$, ya que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\, f(x)\, |\ dx$ diverge. Intentemos de todas maneras evaluar la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x) e^{ikx}\, dx \\ &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \ {}^{*}\!\!\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(kx)\, dx \qquad \text{(integral Cesàro)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{i}{k}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$





3.3 Propiedades

Algunas propiedades de la transformada de Fourier. Sean $f,\ g\ \in L^1$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g, k\} = \alpha\mathcal{F}\{f, k\} + \beta\mathcal{F}\{g, k\} \qquad \mathcal{F} \text{ es lineal} \tag{3.6a}$$

$$\mathcal{F}\{f(x-a), k\} = e^{ika}\mathcal{F}\{f, k\} = e^{ika}F(k) \tag{3.6b}$$

$$\mathcal{F}\{f, -k\} = (\mathcal{F}\{f, k\})^* \qquad \text{si } f \in \mathbb{R} \tag{3.6c}$$

$$\mathcal{F}\{e^{ax}f(x), k\} = \mathcal{F}\{f, k - ai\} = F(k - ai) \tag{3.6d}$$

$$\mathcal{F}\{e^{iax}f(x), k\} = \mathcal{F}\{f, k + a\} = F(k + a) \tag{3.6e}$$

$$\mathcal{F}\{f(\alpha x), k\} = \frac{1}{|\,\alpha\,|}\mathcal{F}\left\{f(x), \frac{k}{\alpha}\right\} = \frac{1}{|\,\alpha\,|}F\left(\frac{k}{\alpha}\right) \tag{3.6f}$$

Teorema 3.2 Cuanto más derivable es $f(x)$ tanto más rápido decrece $F(k) \xrightarrow[|\,k\,|\to\infty]{} 0$.

Demostración Sea $f(x)$ continua en $-\infty < x < \infty$. Si $f,\ f' \in L^1$, entonces

$$F(k) \xrightarrow[|\,k\,|\to\infty]{} 0 \ ,$$

pero también

$$kF(k) \xrightarrow[|\,k\,|\to\infty]{} 0 \ ,$$

ya que

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\,dx \overset{\text{ipp}}{=} f(x)\frac{e^{ikx}}{ik\sqrt{2\pi}}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{ik\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{ikx}\,dx = -\frac{1}{ik}\mathcal{F}\{f', k\} \ ,$$

o sea

$$-ikF(k) = \mathcal{F}\{f', k\} \xrightarrow[|\,k\,|\to\infty]{} 0 \ ,$$

pues $f' \in L^1$.

Sean ahora $f,\ f',\ f'',\ f''',\ \ldots,\ f^{(n-1)} \in L^1$ continuas en $-\infty < x < \infty$. Sea $f^{(n)} \in L^1$, entonces integrando n veces por partes obtenemos

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}, k\} = (-ik)^n F(k) \xrightarrow[|\,k\,|\to\infty]{} 0 \ ,$$

lo cual demuestra lo enunciado en el teorema.

q.e.d.

Teorema 3.3 Cuanto más rápido $f(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$, tanto más derivable es $F(k)$.

Demostración Sea $f \in L^1$. Entonces $F(k)$ es continua. En efecto,

$$\begin{aligned}
\Delta F(k) &= F(k+h) - F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ e^{i(k+h)x} - e^{ikx} \right\} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} e^{ihx/2} \left\{ e^{ihx/2} - e^{-ihx/2} \right\} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} e^{ihx/2} 2i \operatorname{sen}\left(\frac{hx}{2}\right) dx \ .
\end{aligned}$$

Que $f \in L^1$ dice que $\int_{-\infty}^{\infty} |\, f \,| < \infty$, luego $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ A$ suficientemente grande, tal que $\int_A^{\infty} |\, f \,| < \epsilon$, $\int_{-\infty}^{-A} < \epsilon$. Además, se tiene que

$$\left| \operatorname{sen}\left(\frac{hx}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2} |\, hx \,| \leq \frac{hA}{2} \qquad \text{para } x \in \ [-A, A] \ .$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores podemos acotar $|\, \Delta F \,|$, a saber

$$\begin{aligned}
|\, \Delta F \,| &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\, f(x) \,| \left| \operatorname{sen}\left(\frac{hx}{2}\right) \right| \ dx \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{-A} |\, f(x) \,| \, dx + \int_A^{\infty} |\, f(x) \,| \, dx + \int_{-A}^{A} |\, f(x) \,| \, \frac{hA}{2} \, dx \right\} \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \epsilon + \epsilon + \frac{hA}{2} \int_{-A}^{A} |\, f(x) \,| \ dx \right\} \ ,
\end{aligned}$$

lo cual es tan pequeño como se quiera. Lo anterior implica que $F(k)$ es continua.

Sea ahora $f(x)$ y $xf(x) \in \ L^1$, entonces afirmamos que $F(k)$ es derivable. En efecto

$$\frac{d}{dk} \left[\sqrt{2\pi} F(k) \right] = \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial k} \left[f(x) e^{ikx} \right] \ dx = i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{ikx} \, dx \ .$$

El intercambio entre la integral y la derivada queda legitimado ya que hay convergencia uniforme porque la última de las integrales tiene un mayorante convergente: $\int_{-\infty}^{\infty} |\, x f(x) \,| < \infty$ pues $xf(x) \in \ L^1$. De lo anterior tenemos que

$$F'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i x f(x) e^{ikx} \, dx = \mathcal{F}\{ixf(x), k\} \ .$$

Finalmente, si $f(x), xf(x), \ldots, x^n f(x) \in \ L^1$, entonces, de una forma análoga al caso anterior, podemos probar que la derivada de la transformada de Fourier existe, porque $F^{(n)}(k) = \mathcal{F}\{(ix)^n f(x), k\}$.

q.e.d.

También se puede probar que, en general, mientras más ancha es una función, más angosta es su transformada de Fourier y viceversa, como ya observamos en los ejemplos de la sección 3.2.

Definición 3.2 *Sea $f(x)$ tal que $x \mid f(x) \mid^2, x^2 \mid f(x) \mid^2 \in L^1$. Definimos la **posición media de la distribución** $\mid f(x) \mid^2$*

$$\langle x \rangle = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} x \mid f(x) \mid^2 dx \ , \tag{3.7}$$

con

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid^2 dx \ ,$$

*y el **ancho de la distribución** $\mid f(x) \mid^2$*

$$\Delta x = \sqrt{\langle\, (x - \langle x \rangle)^{\,2} \rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \ , \tag{3.8}$$

Teorema 3.4 Sea Δx el ancho medio asociado a una función $f(x) \in L^1$. Sea $F(k) = \mathcal{F}\{f(x), k\}$ la transformada de Fourier de f, con ancho Δk. Entonces se cumple

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2} \ .$$

La igualdad se consigue sólo si $f(x)$ es una gaussiana.

3.4 Aplicaciones

a) Consideremos la ecuación de Laplace en dos dimensiones

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \ .$$

Busquemos soluciones para $y \geq 0$ que satisfagan las condiciones de contorno

$$\Phi(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad \Phi(x, y) \xrightarrow[y \to \infty]{} 0 \ .$$

Solución

Realicemos separación de variables, *i.e.* escribimos $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$. Al introducir esta forma para $\Phi(x, y)$ en la ecuación diferencial obtenemos

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\alpha^2 \ ,$$

donde $\alpha > 0$ es la constante de separación. Las soluciones de las respectivas ecuaciones diferenciales son:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \alpha^2 X(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad X(x) = \overline{A}e^{i\alpha x} + \overline{B}e^{-i\alpha x} \ ,$$
$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - \alpha^2 Y(y) = 0 \quad \longrightarrow \quad Y(y) = \overline{C}e^{-\alpha x} + \overline{D}e^{\alpha x} \ .$$

Al aplicar la condición de contorno $\Phi(x,y) \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$ concluimos que $\overline{D} = 0$.

Planteamos la solución más general superponiendo sobre todos los valores posibles de la constante de separación α:

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[A(\alpha)e^{i\alpha x} + B(\alpha)e^{-i\alpha x}\right] e^{-\alpha y}\, d\alpha \ .$$

Imponiendo la condición de borde para $y = 0$:

$$\Phi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[A(\alpha)e^{i\alpha x} + B(\alpha)e^{-i\alpha x}\right]\, d\alpha = f(x) \ .$$

Al definir $A(-\alpha) = B(\alpha)$ podemos compactar las dos integrales en sólo una:

$$\Phi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty A(\alpha)e^{i\alpha x}\, d\alpha = f(x) \ .$$

Identificamos los coeficientes, $A(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x),\alpha\}$, y reemplazamos en la solución general,

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}\{f(x),\alpha\} e^{i\alpha x} e^{-|\alpha| y}\, d\alpha \ ,$$

obteniendo la solución del problema de contorno.

b) Consideremos la ecuación diferencial del oscilador armónico amortiguado y forzado por una fuerza externa:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t) \ .$$

Solución

Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación diferencial, obtenemos

$$(-i\omega)^2\mathcal{F}\{x(t),\omega\} + 2\alpha(-i\omega)\mathcal{F}\{x(t),\omega\} + \omega_0^2\mathcal{F}\{x(t),\omega\} = \mathcal{F}\{f(t),\omega\} \equiv F(\omega) \ .$$

Despejando para la transformada de Fourier de la solución:

$$\mathcal{F}\{x(t),\omega\} = \frac{F(\omega)}{-\omega^2 - 2\alpha i\omega + \omega_0^2} \ .$$

Tomando la antitransformada obtenemos la solución

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{F(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2\alpha i\omega} e^{-i\omega t} \ .$$

El procedimiento anterior resulta útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.