Capítulo 5

Distribuciones temperadas

5.1 Definiciones

Definición 5.1 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los $\mathbb{C}$ con dimensión finita. Sean $\vec{x}$, $\vec{y} \in V$. Existen funciones lineales sobre V, $u(\,\vec{x}\,)$, tal que*

$$V \xrightarrow{u} \mathbb{C} \ ,$$

donde u satisface linealidad, i.e.

$$u(\,\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}\,) = \alpha u(\,\vec{x}\,) + \beta u(\,\vec{y}\,) \ , \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ .$$

Estas funciones forman el dual de V, el cual denotamos por V^*.

Definición 5.2 *Un elemento del espacio dual es llamado un covector. La acción de un covector $u \in V^*$ sobre un vector $\vec{x} \in V$ la denotamos por*

$$\langle u, \, \vec{x}\,\rangle = u(\,\vec{x}\,) \in \mathbb{C} \ . \tag{5.1}$$

Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{S}$ de dimensión infinita. Sus vectores son funciones $x(t)$, $y(t), \ldots \in \mathcal{S}$.

Definición 5.3 *Un funcional lineal sobre $\mathcal{S}$ es una función φ que actúa sobre las funciones $x(t)$, $y(t), \ldots \in \mathcal{S}$, tal que*

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$$

y

$$\langle \varphi, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha \, \langle \varphi, x\rangle + \beta \, \langle \varphi, y\rangle \qquad \forall \ \alpha, \, \beta \in \mathbb{C} \ y \ \forall \ x, \, y \in \mathcal{S}.$$

Definición 5.4 *Sean $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ una sucesión de funciones en $\mathcal{S}$. Se dice que esta sucesión converge fuertemente a cero si*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} t^m x_n^{(k)}(t) = 0 \qquad \forall \ k, m = 0, 1, 2, \ldots} \tag{5.2}$$

uniformemente en $-\infty < t < \infty$. En tal caso escribimos

$$x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{!} 0 \ .$$

Si la sucesión $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ converge fuertemente a $x(t)$, *i.e.*

$$x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{!} x(t) \ ,$$

significa que

$$y_n(t) \equiv x_n(t) - x(t) \xrightarrow[n\to\infty]{!} 0 \ .$$

Ejemplos

1) Si $f(t) \in \mathcal{S}$, entonces $x_n(t) = \dfrac{f(t)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{!} 0$

2) Un ejemplo de no convergencia fuerte. Consideremos

$$x_n(t) = \frac{1}{n^s}\, e^{-t^2/n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ .$$

Entonces

$$t^m x_n(t) = \left(\frac{t}{n}\right)^s \frac{1}{n^{s-m}}\, e^{-t^2/n^2} \ .$$

Tomamos $m > s$ y $t = n$. t varía con n (si hay convergencia uniforme, la expresión anterior debe converger a cero para todo t). Entonces

$$t^m x_n(t) = t^{m-s} e = n^{m-s} e \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \ .$$

No hay convergencia fuerte. Obsevamos que si hubiéramos tomado t fijo, es decir el límite puntual, el límite es cero.

Definición 5.5 *Un funcional lineal φ sobre $\mathcal{S}$ es una distribución temperada si es continua en el sentido*

$$y_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{!} y(t) \Longrightarrow \langle \varphi, y_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif en } \mathbb{C}} \langle \varphi, y\rangle \ .$$

Definición 5.6 *La suma de dos distribuciones ψ y φ se define como el funcional $\psi + \varphi$ tal que:*

$$\langle \psi + \varphi, x\rangle = \langle \psi, x\rangle + \langle \varphi, x\rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{S} \ . \tag{5.3}$$

Definición 5.7 *El producto de un escalar λ por una distribución ψ se define como el funcional lineal $\lambda\psi$ tal que:*

$$\langle \lambda\psi, x\rangle = \lambda \,\langle \psi, x\rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{S} \text{ y } \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \ . \tag{5.4}$$

Es inmediato mostrar que $\psi + \varphi$ y $\lambda\psi$ son funcionales lineal y que además son distribuciones temperadas. Luego el conjunto de las distribuciones temperadas sobre $\mathcal{S}$, forma un espacio vectorial denotado $\overline{\mathcal{S}}^*$. $\overline{\mathcal{S}}^*$ **no es** el espacio dual de $\mathcal{S}$.

Ejemplos

1) $\langle \delta, x\rangle = x(0),\ \forall\, x \in \mathcal{S}$. Mostremos que $\delta \in \overline{\mathcal{S}}^*$. Claramente δ es funcional lineal sobre $\mathcal{S}$,

$$\langle \delta, \alpha\, x + \beta\, y\rangle = \alpha\, x(0) + \beta\, y(0) = \alpha\,\langle \delta, x\rangle + \beta\,\langle \delta, y\rangle \ .$$

Sean $\{y_n(t)\}$ una sucesión de funciones que convergen fuertemente a $y(t)$, es decir,

$$y_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{!} y(t) \ .$$

Consideremos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \langle \delta, y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} y_n(0) \overset{\text{unif}}{=} y(0) = \langle \delta, y\rangle \ .$$

Por lo anterior tenemos que $\delta \in \overline{\mathcal{S}}^*$.

2) $\langle \delta_a, x\rangle = x(a),\ \forall\, x \in \mathcal{S}$. De la misma forma anterior, podemos demostrar que $\delta_a \in \overline{\mathcal{S}}^*$.

3) $\langle \delta', x\rangle = -x'(0)\ \ \forall\, x \in \mathcal{S}$. Demostremos que $\delta' \in \overline{\mathcal{S}}^*$. Linealidad:

$$\langle \delta', \alpha x + \beta y\rangle = -\alpha x'(0) - \beta y'(0) = \alpha\,\langle \delta', x\rangle + \beta\,\langle \delta', y\rangle \ .$$

Sea

$$y_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{!} y(t) \ .$$

Tomemos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \langle \delta', y_n\rangle = -\lim_{n\to\infty} y_n'(0) \overset{\text{unif}}{=} -y(0) = \langle \delta', y\rangle \ .$$

Concluimos, de lo anterior, que $\delta' \in \overline{\mathcal{S}}^*$.

4) $\langle \varphi, x\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt$.

Linealidad

$$\langle \varphi, \alpha x + \beta y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha x(t) + \beta y(t)]\ dt = \alpha\,\langle \varphi, x\rangle + \beta\,\langle \varphi, y\rangle \ .$$

Sea

$$y_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{!} y(t) \ ,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi, y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_n(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} y_n(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\ dt = \langle \varphi, y\rangle \ ,$$

luego $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$.

Definición 5.8 *Una función $f(t)$ se dice de* **crecimiento lento** *si*

$$|\, f(t)\,| < A(1+t^2)^m \quad \textit{para ciertos } A \textit{ y } m. \tag{5.5}$$

Esto significa que $f(t)$ tiene crecimiento polinomial, no exponencial. Quedan también excluidas funciones singulares como $1/t$

Definición 5.9 *Sea una función $f(t):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de crecimiento lento, seccionalmente continua y con discontinuidades "mansas". Definimos el* **funcional** $\overline{f}$ *asociado a la función $f(t)$ de la siguiente manera:*

$$\boxed{\left\langle \overline{f}, x\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t)\; dt\ .} \tag{5.6}$$

Proposición 5.1 El funcional $\overline{f}\in\overline{\mathcal{S}}^{\,*}$.

Demostración Consideremos el funcional actuando sobre una combinación lineal de funciones:

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{f}, \alpha x+\beta y\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\alpha x(t)+\beta y(t)\right]\; dt\\ &= \alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t)\; dt+\beta\int_{-\infty}^{\infty} f(t)y(t)\; dt = \alpha\left\langle \overline{f}, x\right\rangle+\beta\left\langle \overline{f}, y\right\rangle\ .\end{aligned}$$

Luego $\overline{f}$ es un funcional lineal. Por otra parte, sea

$$y_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{!} y(t)\ ,$$

lo cual significa que para un $\epsilon>0$ arbitrario se tiene que

$$\left[y_n(t)-y(t)\right]\left(1+t^2\right)^{m+1} < \epsilon\ ,$$

de cierto n en adelante, independiente de t. Entonces

$$\left|\,\left\langle \overline{f}, y_n-y\right\rangle\,\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[y_n(t)-y(t)\right]\; dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\, f(t)\,|\,|\, y_n(t)-y(t)\,|\; dt\ .$$

Como es de crecimiento lento,

$$\left|\,\left\langle \overline{f}, y_n-y\right\rangle\,\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} A(1+t^2)^m\,|\, y_n(t)-y(t)\,|\; dt, \quad \text{para ciertos } A,\, m.$$

Como $y_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{!} y(t)$,

$$0=\lim_{n\to\infty} t^m\left[y_n^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right] \qquad \forall\, k, m, t\ .$$

En particular,

$$0=\lim_{n\to\infty}(1+t^2)^{m+1}\left[y_n(t)-y(t)\right] \qquad \forall\, m, t\ ,$$

luego existe un N tal que

$$\left|\left\langle \overline{f}, y_n - y\right\rangle\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} A(1+t^2)^m \frac{\varepsilon}{(1+t^2)^{m+1}}\, dt \quad \text{para } \varepsilon \text{ arbitrario y } \forall n > N.$$

Finalmente

$$\left|\left\langle \overline{f}, y_n - y\right\rangle\right| \leq A\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = A\epsilon\pi \ .$$

La penúltima desigualdad se cumple desde un cierto n en adelante, siendo el resultado final tan pequeño como se quiera. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \overline{f}, y_n\right\rangle = \left\langle \overline{f}, y\right\rangle \Longrightarrow \overline{f} \in \overline{\mathcal{S}}^* \ .$$

q.e.d.

Es importante hacer notar que lo que hemos hecho es construir una distribución a partir de una función, y que demostramos que toda función de crecimiento lento tiene un distribución asociada. Sin embargo, no todas las distribuciones provienen de funciones. Pero ciertas propiedades de las distribuciones asociadas a funciones nos servirán para inspirar definiciones y mostrar propiedades válidas para toda distribución.

Teorema 5.1 Sean $f,\ g \in \mathcal{S}$, seccionalmente continuas y de crecimiento lento. Sean $\overline{f},\ \overline{g}$ sus correspondientes distribuciones temperadas. Entonces

$$\overline{f} = \overline{g} \Longrightarrow f = g \ .$$

Demostración

$$\overline{f} = \overline{g} \Longrightarrow \left\langle \overline{f}, x\right\rangle = \langle \overline{g}, x\rangle \qquad \forall\ x \in \mathcal{S} \ .$$

Supongamos que $f \neq g$ en un punto, por ejemplo $f(t_0) > g(t_0)$. Por continuidad de $f(t)$ y $g(t)$ tenemos que $f(t) > g(t)$ en una vecindad (a,b) en torno a t_0. Si t_0 fuera justo un punto de discontinuidad de f og (recordemos que son seccionalmente continuas) no hay problema. Siempre podemos correr t_0 en un intervalo vecino.

Tomemos una función de prueba $x(t)$, tal que $x(t) > 0$ si $t \in\ (a,b)$ y $x(t) = 0$ si $t \notin (a,b)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - g(t)]\, x(t)\ dt = \int_a^b [f(t) - g(t)]\, x(t)\ dt \neq 0 \ .$$

Esto dice que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t)\ dt \neq \int_{-\infty}^{\infty} g(t)x(t)\ dt \Longrightarrow \overline{f} \neq \overline{g} \ ,$$

lo cual significa que $f = g$. $\Rightarrow\Leftarrow$

q.e.d.

Sean f, f' dos funciones de crecimiento lento, continuas en $-\infty < t < \infty$. Sean $\overline{f}$, $\overline{f'}$ las distribuciones correspondientes. Definimos la derivada de la distribución $\overline{f}$ como

$$\overline{f'} = \overline{f}\,' \ .$$

Con ello,

$$\left\langle \overline{f}\,', x \right\rangle = \left\langle \overline{f'}, x \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)x(t)\; dt = f(t)x(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x'(t)\; dt = -\left\langle \overline{f}, x' \right\rangle \ . \quad (5.7)$$

Observemos cómo este resultado, y por lo tanto la definición (5.7), es consistente con el ejemplo 3 de este capítulo.

A la luz de este resultado, proponemos la siguiente definición.

Definición 5.10 *Si $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ definimos la derivada de la distribución, φ', de la siguiente manera:*

$$\boxed{\langle \varphi', x \rangle = -\langle \varphi, x' \rangle} \qquad \forall\, x \in \mathcal{S} \ . \quad (5.8)$$

Proposición 5.2 φ' así definida pertenece a $\overline{\mathcal{S}}^*$.

Demostración Consideremos la derivada del funcional actuando sobre una combinación lineal de funciones:

$$\langle \varphi', \alpha x + \beta y \rangle = -\langle \varphi, \alpha x' + \beta y' \rangle = -\alpha \langle \varphi, x' \rangle - \beta \langle \varphi, y' \rangle = \alpha \langle \varphi', x \rangle + \beta \langle \varphi', y \rangle \ .$$

Se cumple entonces la linealidad. Por otra parte, sea

$$y_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{!} y(t) \ ,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi', y_n \rangle = -\lim_{n\to\infty} \langle \varphi, y_n' \rangle = -\langle \varphi, y' \rangle = \langle \varphi', y \rangle \ .$$

La penúltima igualdad es consecuencia de que $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$, siendo la conclusión final que $\varphi' \in \overline{\mathcal{S}}^*$.
q.e.d.

Una consecuencia de lo anterior es que

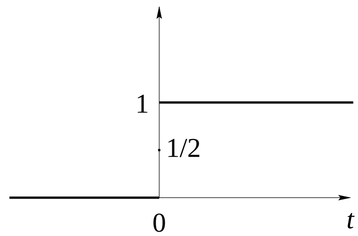
$$\varphi^{(n)} \in \overline{\mathcal{S}}^* \qquad \forall\, \varphi \in \overline{\mathcal{S}}^* \ ,$$

donde

$$\left\langle \varphi^{(n)}, x \right\rangle = (-1)^n \left\langle \varphi, x^{(n)} \right\rangle \quad \forall x \in \mathcal{S} \ . \quad (5.9)$$

Ejemplo Función escalón de Heaviside:

$$h(t) = \frac{1 + \operatorname{sgn} t}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (5.10)$$



Tomamos $h(t)$ como funcional, *i.e.* consideramos el funcional asociado $\overline{h}$, definido por

$$\left\langle \overline{h}, x \right\rangle = \int_0^{\infty} x(t)\, dt \quad \forall x \in \mathcal{S} \ .$$

Evaluemos su derivada

$$\left\langle \overline{h}', x \right\rangle = -\left\langle \overline{h}, x' \right\rangle = -\int_0^{\infty} x'(t)\ dt = -x(t)\Big|_0^{\infty} = x(0) = \langle \delta, x \rangle \ ,$$

luego

$$\boxed{\overline{h}' = \delta} \tag{5.11}$$

Este resultado es importante. Hemos logrado *en algún sentido* diferenciar una función discontinua. El espacio de las distribuciones aparece como una generalización del espacio de funciones, en el cual la derivada existe incluso para funciones discontinua. Sin embargo, esta analogía, que puede sernos útil de modo informal, no debe ser tomada como rigurosa. No es la función discontinua la que estamos derivando, sino el funcional asociado a ella. Si es cierto que, mientras en el espacio de funciones las derivadas no siempre están definidas, en el espacio de distribuciones siempre lo están, y, por ejemplo, como muestra la (5.9), toda distribución es infinitamente diferenciable.

Proposición 5.3 Para distribuciones la diferenciación es lineal, es decir,

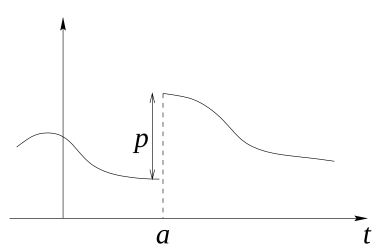
$$(\alpha\varphi + \beta\psi)' = \alpha\varphi' + \beta\psi' \ . \tag{5.12}$$

Demostración Sea $x \in \mathcal{S}$ arbitrario.

$$\left\langle (\alpha\varphi + \beta\psi)', x \right\rangle = -\left\langle \alpha\varphi + \beta\psi, x' \right\rangle = -\alpha \left\langle \varphi, x' \right\rangle - \beta \left\langle \psi, x' \right\rangle = \alpha \left\langle \varphi', x \right\rangle + \beta \left\langle \psi', x \right\rangle \ .$$

q.e.d.

Generalicemos el ejemplo de la función escalón de Heaviside. Sea $f(t)$ una función diferenciable a tramos con una sola discontinuidad en $t = a$.



Sea $p = f(a^+) - f(a^-)$. Por hipótesis f' existe para todo $t \neq a$. Escribamos Df en lugar de f'. Claramente, para $t = a$ Df no existe. Consideremos ahora el funcional $\overline{f}$ asociado a f y tomemos su derivada $\overline{f}'$. Para ello sea $x \in \mathcal{S}$ arbitrario:

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{f}', x \right\rangle &= -\left\langle \overline{f}, x' \right\rangle = -\int_{-\infty}^{a^-} f(t)x'(t)\, dt - \int_{a^+}^{\infty} f(t)x'(t)\, dt \\
&= -f(t)x(t)\Big|_{-\infty}^{a^-} + \int_{-\infty}^{a^-} Df(t)x(t)\, dt - f(t)x(t)\Big|_{a^+}^{\infty} + \int_{a^+}^{-\infty} Df(t)x(t)\, dt \\
&= \left[f(a^+) - f(a^-)\right] x(a) + \left\langle \overline{Df}, x \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{Df}, x \right\rangle + px(a) = \left\langle \overline{Df}, x \right\rangle + p\left\langle \delta_a, x \right\rangle \ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en el espacio de las distribuciones temperadas se satisface:

$$\boxed{\overline{f}' = \overline{f'} = \overline{Df} + p\delta_a} \tag{5.13}$$

Proposición 5.4 Si f tiene discontinuidades con saltos finitos de tamaños p_k en $t_k = a_k$ para $k = 1, \ldots, n$ y si f' es continua fuera de los a_k, entonces

$$\boxed{\overline{f}' = \overline{Df} + \sum_{k=1}^{m} p_k \delta_{a_k}} \tag{5.14}$$

Hemos enfatizado que las distribuciones no son funciones. Pero dadas las fuertes analogías, y aun cuando no todas las distribuciones son funcionales asociados a funciones, las siguientes definiciones nos permiten emplear un lenguaje similar para distribuciones y funciones.

Definición 5.11 *La distribución $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ tiene un valor nulo en (a,b) si $\langle \varphi, x \rangle = 0$, $\forall\, x \in \mathcal{S}$, que sea nula fuera de (a,b). En tal caso se escribe $\varphi(t) = 0$ para $a < t < b$.*

Si el funcional $\overline{f}$ asociado a f tiene un lugar nulo en (a,b) esto nos dice que $f(t) = 0$ en $a < t < b$.

Ejemplo Sea (a,b) un intervalo abierto que no contiene el cero. Sea δ la distribución definida por

$$\langle \delta, x \rangle = x(0) \qquad \forall\, x \in \mathcal{S}\ .$$

Sea $y(t) \in \mathcal{S}$ tal que $y(t) \neq 0$ sólo para $t \in (a,b)$. En tal caso

$$\langle \delta, y \rangle = y(0) = 0\ , \qquad \text{ya que } 0 \notin (a,b).$$

De acuerdo a nuestra convención, se escribe $\delta(t) = 0$ si $t \neq 0$.

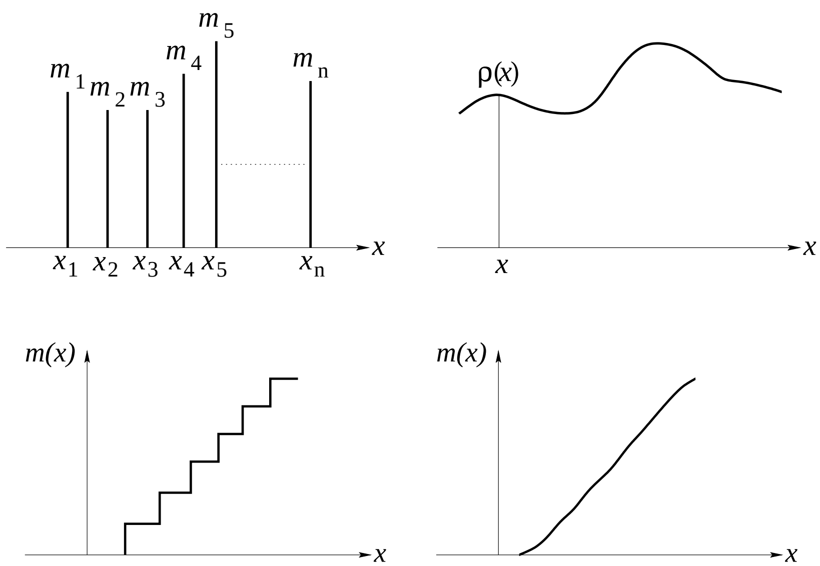
Definición 5.12 *El soporte de una distribución φ es el conjunto de todos los puntos del eje real donde no vale $\varphi(t) = 0$.*

Ejemplo De acuerdo a nuestra definición δ tiene soporte $\{0\}$ y δ_a tiene soporte {a}.

Definición 5.13 *La distribución temperada $\varphi \in \mathcal{S}$ tiene valores g(t) en (a,b) si $\varphi - \overline{g}$ tiene valor nulo en (a,b).*

5.2 Sucesión de distribuciones

Consideremos ciertas distribuciones discretas de masa y la distribución continua asociada.



$$m(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad\qquad m(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(x')\, dx'$$

Podríamos decir que una “sucesión” de distribuciones discretas “tiende” a una distribución continua, usando los términos entre comillas sin mayor precisión. Para formalizar esta idea, pasemos a definir qué vamos a entender por convergencia de una sucesión de distribuciones.

Definición 5.14 *Convergencia de una sucesión de distribuciones*

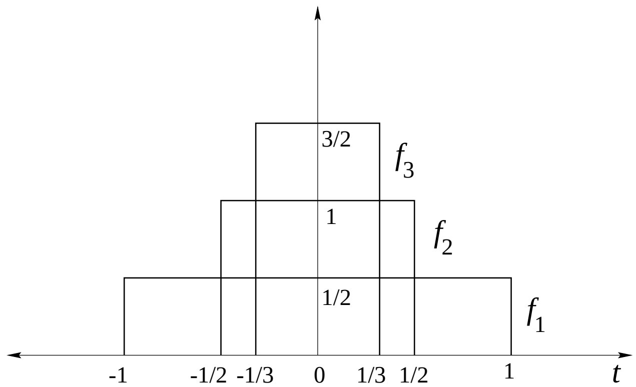
Una sucesión de distribuciones $\{\varphi_n\}$ *converge a una distribución* φ *si y sólo si* $\forall\, x \in \mathcal{S}$ *tenemos que* $\lim\limits_{n\to\infty} \langle \varphi_n - \varphi, x\rangle = 0$, *i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \iff \lim_{n\to\infty} \langle \varphi_n, x\rangle = \langle \varphi, x\rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{S}\ . \tag{5.15}$$

Ejemplos

1) Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } |\,t\,| < \dfrac{1}{n} \\[2ex] 0 & \text{si } |\,t\,| > \dfrac{1}{n} \end{cases} .$$



Consideremos ahora los respectivos funcionales asociados y veamos cómo actúa uno de ellos sobre una función x cualquiera. Usando el teorema del valor medio:

$$\langle \overline{f}, x \rangle = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2} x(t)\, dt = \frac{n}{2}\, \frac{2}{n}\, x(\tau) \ , \qquad \text{con } -\frac{1}{n} < \tau < \frac{1}{n} \ ,$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \langle \overline{f_n}, x \rangle = x(0) = \langle \delta, x \rangle \ ,$$

es decir, en términos de distribuciones

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f_n} = \delta \ .$$

2) Sea $g(t)$ una función seccionalmente continua, con

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = 1 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\, g(t)\, |\ dt < \infty \ .$$

$g(t)$ no es necesariamente simétrica. Formemos la sucesión

$$f_n(t) = n\, g(nt) \ .$$

Consideremos la distribución asociada a f_n y veamos cómo actúa sobre una función x cualquiera.

$$\langle \overline{f_n}, x \rangle = n \int_{-\infty}^{\infty} g(nt) x(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) x\left(\frac{u}{n}\right)\ du \ .$$

Interesa el límite cuando $n \to \infty$. Busquemos una mayorante. Sea $M > \max\limits_{-\infty<t<\infty} \{|\, x(t)\, |\}$, entonces

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(u) x\left(\frac{u}{n}\right)\ du \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\, g(u)\, | \left| x\left(\frac{u}{n}\right) \right|\ du < M \int_{-\infty}^{\infty} |\, g(u)\, |\ du < \infty \ .$$

Vemos que hay convergencia uniforme y podremos intercambiar el límite con la integral.

$$\lim_{n\to\infty} \langle \overline{f_n}, x \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) x\left(\frac{u}{n}\right)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \lim_{n\to\infty} x\left(\frac{u}{n}\right)\, du = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, du = x(0) \ ,$$

por lo tanto

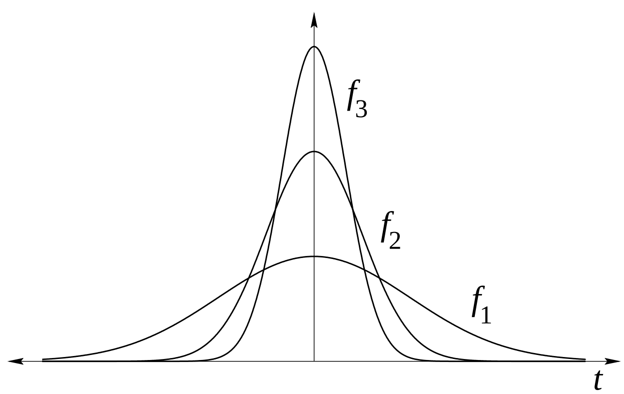
$$\lim_{n\to\infty} \overline{f_n} = \delta \ .$$

3) Una ilustración del caso anterior.

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \ , \qquad \text{de modo que} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = 1 \ .$$

Formemos la sucesión

$$f_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{n^2 t^2} \ .$$



Obtenemos de acuerdo a la conclusión del caso anterior

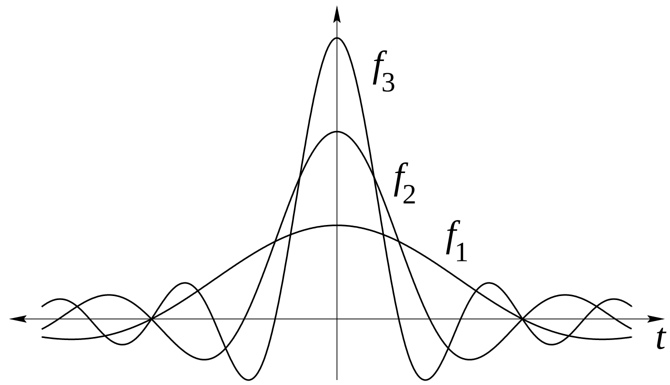
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \overline{\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2}} = \delta(t)} \tag{5.16}$$

4) Otra ilustración.

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t} \ , \qquad \text{de modo que} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = 1 \ .$$

La sucesión asociada es:

$$f_n(t) = \frac{n}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nt)}{nt} \ .$$



Nuevamente obtenemos, a partir de la conclusión anterior, el resultado para el límite:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \overline{\frac{\operatorname{sen}(nt)}{\pi t}} = \delta(t)} \tag{5.17}$$

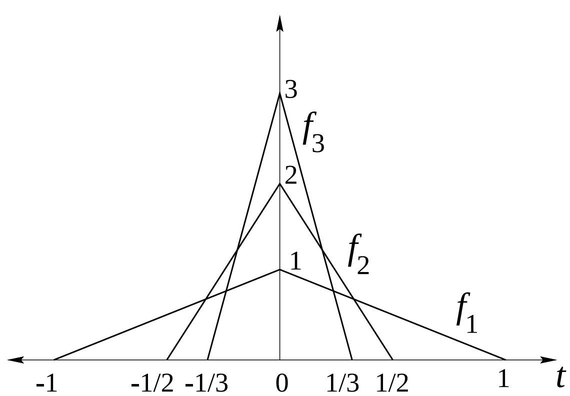
Está se conoce como la representación de Dirichlet de la δ.

5) Sea

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\,t\,| > 1 \\ t+1 & \text{si } -1 < t < 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases} .$$

La sucesión, usando $f_n = ng(nt)$, tenemos

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\,t\,| > 1/n \\ n^2 t + n & \text{si } -1/n < t < 0 \\ -n^2 t + n & \text{si } 0 < t < 1/n \end{cases} .$$



En el límite,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f_n} = \delta \ .$$

6) Lorentziana

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2} \ ,$$

la sucesión

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+(nt)^2} = \frac{1}{n\pi}\frac{1}{\left[\dfrac{1}{n^2}+t^2\right]} \ .$$

Luego, con $\eta = 1/n$

$$\lim_{\eta\to 0}\overline{\frac{1}{\pi}\frac{\eta}{\eta^2+t^2}} = \delta \ .$$

7) Una generalización del ejemplo 2. Toda sucesión de funciones tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{-\infty}^{-\Delta} |\, f_n(x)\,|\; dx + \int_{\Delta}^{\infty} |\, f_n(x)\,|\; dx\right] = 0 \ , \qquad \forall\, \Delta > 0 \text{ fijo}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\Delta}^{\Delta} f_n(x)\, dx = 1 \ , \qquad \forall\, \Delta > 0 \text{ fijo}$$

cumple

$$\lim_{n\to\infty}\overline{f_n} = \delta \ .$$

Demostración: Ejercicio.

Teorema 5.2

$$\left(\lim_{n\to\infty}\varphi_n\right)' = \lim_{n\to\infty}\varphi_n' \ . \tag{5.18}$$

Demostración $\forall\, x \in \mathcal{S}$ se tiene

$$\left\langle \left(\lim_{n\to\infty}\varphi_n\right)', x\right\rangle = -\left\langle \lim_{n\to\infty}\varphi_n, x'\right\rangle = -\lim_{n\to\infty}\langle\varphi_n, x'\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle\varphi_n', x\rangle = \left\langle\lim_{n\to\infty}\varphi_n', x\right\rangle \ .$$

q.e.d.

Aplicaciones

1) Sea

$$\Phi_n = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu \ .$$

Se tiene

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu \right)' = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi'_\nu \ .$$

Si consideramos el límite cuando $n \to \infty$ para Φ_n tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu \equiv \Phi \ .$$

Derivando,

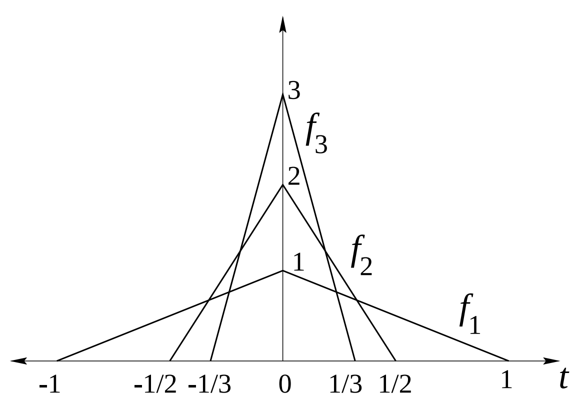
$$\Phi' = \left(\lim_{n\to\infty} \Phi_n \right)' = \lim_{n\to\infty} \Phi'_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \varphi'_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi'_\nu \ .$$

2) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{f_n} = \delta$, entonces

$$\left(\lim_{n\to\infty} \overline{f_n} \right)' = \lim_{n\to\infty} \overline{f'_n} = \delta' \ . \tag{5.19}$$

Una ilustración de lo anterior.

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\,t\,| > 1/n \\ n^2 t + n & \text{si } -1/n < t < 0 \\ -n^2 t + n & \text{si } 0 < t < 1/n \end{cases} \ .$$

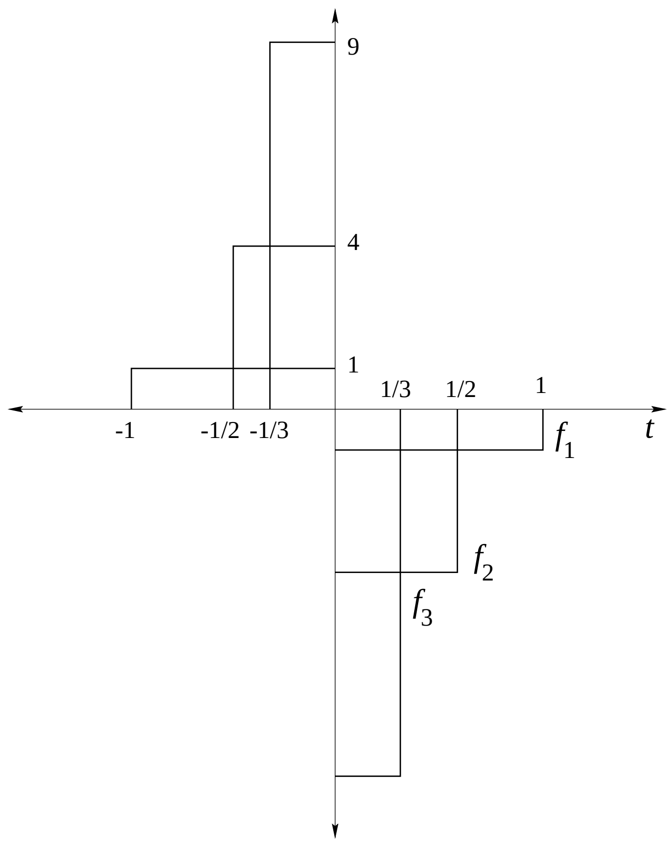


El límite:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f_n} = \delta \ .$$

Su derivada:

$$f_n'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\, t\, | > 1/n \\ n^2 & \text{si } -1/n < t < 0 \\ -n^2 & \text{si } 0 < t < 1/n \end{cases} \ ,$$



Y su límite será, de acuerdo al resultado anterior,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f_n'} = \delta' \ .$$

Definición 5.15 *Paridad en distribuciones*

Decimos que φ es una distribución par si

$$\langle \varphi, x(t)\rangle = \langle \varphi, x(-t)\rangle \ . \tag{5.20}$$

Decimos que φ es una distribución impar si

$$\langle \varphi, x(t)\rangle = -\langle \varphi, x(-t)\rangle \ . \tag{5.21}$$

Ejemplos

Sea $x(t) \in \mathcal{S}$ arbitraria. Definimos $y(t) = x(-t)$.
1) δ es una distribución par. Demostración:

$$\langle \delta, x(-t) \rangle = \langle \delta, y(t) \rangle = y(0) = x(0) = \langle \delta, x(t) \rangle \ .$$

2) δ' es una distribución impar. Demostración:

$$\langle \delta', x(-t) \rangle = \langle \delta', y(t) \rangle = -\langle \delta, y'(t) \rangle = -y'(0) = x'(0) = -\langle \delta, x(t) \rangle \ ,$$

ya que si $y(t) = x(-t)$ esto implica que $y'(t) = -x'(-t)$.

Notación usada

En muchos textos de Física se generaliza la definición (5.6) para distribuciones que no provienen de funciones:

$$\langle \varphi, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) x(t)\, dt \ ,$$

aun cuando $\varphi(t)$ no es una función y no tiene sentido estricto la integral. Es sólo una notación útil, y la utilizaremos frecuentemente. En particular, con esta notación podemos reescribir la condición de paridad de una distribución. Si φ es par,

$$\langle \varphi, x(-t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) x(-t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-t') x(t')\, dt' \ ,$$

es igual a

$$\langle \varphi, x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) x(t)\, dt \ ,$$

Si φ es impar, análogamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-t) x(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) x(t)\, dt \ .$$

Esto justifica la notación:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(-t) \ , && \text{(distribución par)} \\ \varphi(t) &= -\varphi(-t) \ , && \text{(distribución impar)} \ . \end{aligned} \tag{5.22}$$

Esta notación de distribuciones como si fueran funciones se utiliza también para la delta. Con ella, algunas de las propiedades ya demostradas para esta distribución toman la forma:

i)

$$\langle \delta, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) x(t)\, dt = x(0) \ .$$

ii)

$$\langle \delta_a, x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)x(t)\; dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)x(t)\; dt = x(a)\ .$$

Observemos la conveniencia de la notación $\delta_a = \delta(t-a)$, que permite que la expresión $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)x(t)\, dt$ pueda ser considerada como el límite continuo de la relación discreta en términos de lka delta de Kronecker $x_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_{ij}x_j$.

iii)

$$\langle \delta, 1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\; dt = 1\ .$$

iv) $\delta(t) = \delta(-t)$, δ es par.

v) $\delta'(t) = -\delta'(-t)$, δ' es impar.

vi) $\delta'(t-a) = -\delta'(a-t)$.

vii) La notación anterior nos permite demostrar fácilmente la siguiente importante relación:

$$\boxed{\delta(kt) = \frac{1}{\mid k\mid}\delta(t)} \tag{5.23}$$

Demostración Sea $\delta(kt)$ con $k \neq 0$. Consideremos la delta actuando sobre una función $x \in \mathcal{S}$ cualquiera:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(kt)x(t)\; dt &= \operatorname{sgn}(k) \int_{-\operatorname{sgn}(k)\infty}^{\operatorname{sgn}(k)\infty} \delta(u)x\left(\frac{u}{k}\right)\; \frac{du}{\mid k\mid} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)x\left(\frac{u}{k}\right)\; \frac{du}{\mid k\mid} = \frac{1}{\mid k\mid}x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t)}{\mid k\mid}x(t)\; dt\ . \end{aligned}$$

q.e.d.

viii) Si f es una función continua, analítica y diferenciable, con ceros simples en t_i, con $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\boxed{\delta(f(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mid f'(t_i)\mid}\delta(t-t_i)}\ . \tag{5.24}$$

Demostración Consideremos $\delta(f(t))$ con $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{S}$, es decir, f continua, analítica y diferenciable. Supongamos que f tiene ceros simples en t_i con $i = 1, 2, \ldots, n$, $f(t_i) = 0\ \forall\ i$.

$$\langle \delta(f(t)), x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(t))x(t)\; dt\ .$$

El soporte de $\delta(f(t)) = \{t_i\}_{i=1}^n$. En la vecindad de estos puntos f puede expandirse en serie:

$$f(t) \simeq f(t_i) + f'(t_i)(t-t_i) = f'(t_i)(t-t_i) \ ,$$

luego

$$\delta(f(t)) = \sum_{i=1}^n \delta(f'(t_i)(t-t_i)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mid f'(t_i) \mid}\delta(t-t_i) \ .$$

q.e.d.

5.3 Producto de distribuciones

Definición 5.16 *Producto de dos distribuciones asociadas a funciones*
Sean f, g continuas y derivables a tramos con discontinuidades "mansas" y de crecimiento lento. Sean $\overline{f}$, $\overline{g}$ sus distribuciones asociadas, entonces definimos el producto de $\overline{f}$ y $\overline{g}$ por

$$\left\langle \overline{f}\cdot\overline{g}, x\right\rangle \equiv \langle \overline{g}, fx\rangle \ . \tag{5.25}$$

Proposición 5.5

$$\overline{f}\cdot\overline{g} = \overline{g}\cdot\overline{f} \ . \tag{5.26}$$

Demostración

$$\left\langle \overline{f}\cdot\overline{g}, x\right\rangle = \langle \overline{g}, fx\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)x(t)\, dt = \left\langle \overline{f}, gx\right\rangle = \left\langle \overline{g}\cdot\overline{f}, x\right\rangle \ ,$$

luego

$$\overline{f}\cdot\overline{g} = \overline{g}\cdot\overline{f} \ .$$

q.e.d.

Definición 5.17 *Multiplicación de una distribución arbitraria por polinomio*
Sea $p(t)$ un polinomio y sea $\overline{p}(t) \in \overline{\mathcal{S}}^*$ su funcional asociado. Sea, además $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ arbitrario, entonces $\overline{p}\,\varphi$ se define por

$$\langle \overline{p}\,\varphi, x\rangle \equiv \langle \varphi, p\,x\rangle \ . \tag{5.27}$$

Proposición 5.6 La distribución $\overline{p}\,\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ si $p(t)$ es un polinomio.

Demostración: Ejercicio.

Ejemplo $\bar{t}\,\delta = \bar{0}$. En efecto

$$\langle \bar{t}\delta, x\rangle = \langle \delta, tx\rangle = tx|_0 = 0 \times x(0) = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \times x(t)\, dt = \langle \bar{0}, x\rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{S}\ ,$$

por lo tanto, podemos identificar $\bar{t}\,\delta = \bar{0}$. En los libros se suele encontrar la notación $t\,\delta(t) = 0$. Ésta parece una igualdad de funciones. Si se considera a la delta de Dirac como una función nula en todas partes, salvo en cero donde es infinoto, la igualdad anterior es muy natural para $t \neq 0$ pero no para $t = 0$. Éste es un ejemplo de que la anterior es sólo uan notación, que puede ser útil, pero que tiene sus límites.

No existe una extensión obvia a las definiciones (5.25) y (5.27) para el caso de dos distribuciones arbitrarias φ_1, φ_2, *i.e.* en general no tiene sentido hablar de $\varphi_1\varphi_2$. Por ejemplo, $[\delta(t)]^2$ o $\delta(t)\delta'(t)$ son **objetos sin sentido**.

5.4 Distribuciones y ecuaciones diferenciales

Consideremos la ecuación diferencial

$$t\frac{df}{dt} = 0\ .$$

Las soluciónes:

$$f(t) = \begin{cases} C_1 = \text{cte.} & t > 0 \\ C_2 = \text{cte.} & t < 0 \end{cases}\ ,$$

donde $C_1 = C_2$ si deseamos que f sea función ordinaria, *i.e.*, continua (de otro modo no sería diferenciable). Pero si admitimos distribuciones como soluciones, no es necesario que $C_1 = C_2$ ya sabemos que dentro del espacio de distribuciones, "funciones" discontinuas son diferenciables. Intentemos pues una solución del tipo: solución del tipo:

$$f(t) = C_1 + C_2\, h(t)\ , \qquad \text{donde} \qquad h(t) = \frac{1 + \text{sgn}(t)}{2}\ .$$

Entonces

$$\bar{t}\,\overline{f'}(t) = \bar{t}\,C_2\,\bar{h}(t)' = C_2(\,\bar{t}\,)\delta = 0\ ,$$

es decir, $\bar{f}$ es solución.

Una consecuencia importante de haber construido el espacio de distribuciones es que podamos extender el espacio de soluciones de ecuaciones diferenciales y, por ende, el conjunto de ecuaciones diferenciales que somos capaces de resolver.

Teorema 5.3

$$\left(\bar{f}\,\bar{g}\right)' = \bar{f}\,'\bar{g} + \bar{f}\,\bar{g}\,' \tag{5.28a}$$

o bien

$$(\overline{p}\,\varphi)' = \overline{p}\,'\,\varphi + \overline{p}\,\varphi' \ . \tag{5.28b}$$

Demostración

$$\langle(\overline{p}\,\varphi)', x\rangle = -\,\langle\overline{p}\,\varphi, x'\rangle = -\,\langle\varphi, p\,x'\rangle \ .$$

Por otro lado,

$$\langle\overline{p}'\,\varphi + \overline{p}\,\varphi', x\rangle = \langle\overline{p}\,'\varphi, x\rangle + \langle\overline{p}\,\varphi', x\rangle = \langle\varphi, p'\,x\rangle + \langle\varphi', p\,x\rangle = \langle\varphi, p'\,x\rangle - \langle\varphi, (p\,x)'\rangle = -\,\langle\varphi, p\,x'\rangle \ .$$

Comparando,

$$(\overline{p}\,\varphi)' = \overline{p}\,'\,\varphi + \overline{p}\,\varphi' \ .$$

q.e.d.

5.5 Convergencia débil

La definición (5.15) introdujo el concepto de convergencia de una sucesión de distribuciones. Es posible definir también la convergencia de una sucesión de distribuciones provenientes de funciones.

Definición 5.18 *Convergencia débil*
Una sucesión de funciones $f_n(t)$ continuas y derivables por tramos con discontinuidades mansas y de crecimiento lento, se dice que converge débilmente a f si

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f_n} = \overline{f} \in \overline{\mathcal{S}}^{\,*} \text{ existe.} \tag{5.29}$$

Una sucesión que converge débilmente, no significa necesariamente que converge en algún sentido usual: uniformemente, puntualmente o en la norma. Además , el límite anterior es como **distribuciones**, no como funciones. Puede darse o no que además $f_n(t)$ converja a cierta función $g(t)$ puntualmente, o en la norma o uniformemente. Sin embargo, la convergencia uniforme asegura convergencia débil, como afirma la siguiente proposición.

Proposición 5.7 Una sucesión de funciones $f_1, \ldots, f_n$ continuas, derivables por tramos y de crecimiento lento con

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) \xrightarrow{\text{unif}} f(t) \ ,$$

tiene convergencia débil.

Demostración Consideremos

$$\langle \overline{f_n} - \overline{f}, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [f_n(t) - f(t)]\, x(t)\, dt \ ,$$

para $x \in \mathcal{S}$. Sea además $M > |\, x(t)\, |$ en el intervalo $\infty < t < \infty$ con M finito. Elijamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Tenemos:

$$\langle \overline{f_n} - \overline{f}, x \rangle = \int_{-\infty}^{-A} [f_n(t) - f(t)]\, x(t)\, dt + \int_{-A}^{A} [f_n(t) - f(t)]\, x(t)\, dt + \int_{A}^{\infty} [f_n(t) - f(t)]\, x(t)\, dt \ .$$

Elegimos A tan grande que se satisfagan, simultáneamente, las dos condiciones siguientes:

$$\left| \int_{-\infty}^{-A} [f_n(t) - f(t)]\, x(t)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \left| \int_{A}^{\infty} [f_n(t) - f(t)]\, x(t)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

Como $f_n - f \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif}} 0$ en el intervalo $[-A, A]$, se tiene que para cierto $N \in \mathbb{N}$,

$$|\, f_n(t) - f(t)\, | < \frac{\varepsilon}{6AM} \ , \qquad \forall\, n > N \ .$$

Haciendo uso de lo anterior podemos acotar la integral en el intervalo central, es decir,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-A}^{A} [f_n(t) - f(t)]\, x(t)\, dt \right| &\leq \int_{-A}^{A} |\, f_n(t) - f(t)\, |\, |\, x(t)\, |\ dt \\ &< \frac{\varepsilon}{6AM} \int_{-A}^{A} |\, x(t)\, |\ dt = \frac{\varepsilon}{6AM}\, 2AM = \frac{\varepsilon}{3} \ , \quad \forall\, n > N \ . \end{aligned}$$

Con este resultado podemos acotar la integral completa

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} [f_n(t) - f(t)]\, x(t)\, dt \right| = \left|\, \langle \overline{f_n} - \overline{f}, x \rangle \,\right| < \varepsilon \ , \quad \forall\, n > N \ .$$

Finalmente podemos escribir $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{f_n} = f$, por lo tanto, f_n converge débilmente a f.

q.e.d.

Ejemplos

1) Sea $f_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{int}$. Se tiene

$$\langle \overline{f_n}, x \rangle = \mathcal{F}\{x, n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ , \qquad \forall\, x \in \mathcal{S} \ ,$$

pues la transformada de Fourier se anula en $\pm\infty$.

Luego

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{int}}\right)=\overline{0}\ .$$

Convergencia débil, en el sentido de distribución. Por otro lado, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$ no existe, salvo en $t=2\pi\nu$, $\nu\in\mathbb{Z}$. Luego en este caso no hay convergencia de f_n en ningún sentido.

2) Sea

$$f_n(t)=\begin{cases}0\ , & \text{si } t\notin[1/n,2/n]\\ n\ , & \text{si } t\in[1/n,2/n]\end{cases}\ .$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{\infty}f_n(t)\,dt=1$, pero $f_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, puntualmente.

Pero además:

$$\left\langle\overline{f_n},x\right\rangle=n\int_{1/n}^{2/n}x(t)\,dt=n\,x(t_M)\int_{1/n}^{2/n}dt\ ,\quad \text{algún } t_M\in[1/n,2/n]$$

$$\left\langle\overline{f_n},x\right\rangle=x(t_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}x(0)=\langle\delta,x\rangle\ .$$

Luego

$$\overline{f_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\delta\ ,\quad(\text{débilmente}).$$

Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle\overline{f},x\right\rangle\neq\left\langle\overline{\lim_{n\to\infty}f_n},x\right\rangle=\left\langle\overline{0},x\right\rangle=0\ .$$

El problema es que la convergencia de f_n a 0 no es uniforme.

3) Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(t)=\begin{cases}n/2\ , & \text{si } |\,t\,|<1/n\\ 0\ , & \text{si } |\,t\,|>1/n\end{cases}\qquad \text{para } n=1,2,3,\ldots.$$

El límite de la sucesión:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t)=\begin{cases}0 & \forall\ t\neq0\\ \infty & t=0\end{cases}\ .$$

No hay convergencia puntual, sin embargo, $f_n(t)$ converge débilmente, pues $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{f_n}=\delta$.

4) Consideremos las siguientes sucesiones

$$f_n(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}(-nt) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-nt}^{\infty} e^{-u^2}\,du \qquad \text{y} \qquad g_n(t) = e^{-e^{-nt}} \ .$$

Ambas sucesiones convergen débilmente.

Demostración Consideremos el límite de las f_n:

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \overline{f_n}, x \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)x(t)\ dt \ .$$

Podemos acotar la integral:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)x(t)\ dt \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\, f_n(t)\,|\,|\,x(t)\,|\ dt \le \int_{-\infty}^{\infty} |\,x(t)\,|\ dt < \infty \ ,$$

ya que $|\, f_n(t)\,| < 1\ \forall\, f_n, \forall\, n, \forall\, t$. Luego existe mayorante convergente y podemos intercambiar el límite con la integral:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(t)x(t)\,dt \ .$$

Pero el límite de f_n es

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1/2 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} \ ,$$

lo cual corresponde a la definición de la función escalón de Heaviside $h(t)$. Tenemos entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \overline{f_n}, x \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t)\ dt = \left\langle \overline{h}, x \right\rangle \ .$$

$\overline{f_n}$ entonces converge débilmente:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f_n} = \overline{h} \ .$$

Análogamente, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \langle \overline{g_n}, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} g_n(t)x(t)\ dt \ ,$$

pero el límite de g_n es

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1/e & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} \ .$$

Excepto en $t = 0$, coincide con la función escalón $h(t)$. Un solo punto no es importante en la integración, luego

$$\lim_{n\to\infty} \langle \overline{g_n}, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t)\ dt = \langle \overline{h}, x \rangle$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{g_n} = \overline{h}\ .$$

q.e.d.

$\overline{g_n}$ también converge débilmente a $\overline{h}$.