Capítulo 6

Distribuciones y transformada de Fourier

Sea $f \in \mathcal{S}$. Sabemos que $\mathcal{F}\{f,k\} \in \mathcal{S}$.

Definición 6.1 *Transformada de Fourier de un funcional.*
Sea $\overline{f} \in \overline{\mathcal{S}}^*$ el funcional asociado a f. Definimos $\mathcal{F}\{\overline{f}\} \in \overline{\mathcal{S}}^*$ por:

$$\mathcal{F}\{\overline{f},k\} = \overline{\mathcal{F}\{f,k\}} \ .$$

Proposición 6.1 $\left\langle \overline{\mathcal{F}\{f\}}, x \right\rangle = \left\langle \overline{f}, \mathcal{F}\{x\} \right\rangle$

Demostración

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\mathcal{F}\{f\}}, x \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathcal{F}\{f,k\} x(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{ikt} x(k) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, x(k) e^{ikt} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \mathcal{F}\{x,t\} \\
&= \left\langle \overline{f}, \mathcal{F}\{x\} \right\rangle \ .
\end{aligned}$$

q.e.d.

Esta proposición motiva la siguiente definición.

Definición 6.2 *Transformada de Fourier de una distribución. Sea $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ y $x \in \mathcal{S}$ arbitrario. Definimos*

$$\boxed{\langle \mathcal{F}\{\varphi\}, x \rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}\{x\} \rangle} \tag{6.1}$$

Proposición 6.2 Si $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$, entonces $\mathcal{F}\{\varphi\} \in \overline{\mathcal{S}}^*$.

Demostración

a) Linealidad.

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}\{\varphi\},\alpha x+\beta y\rangle &= \langle\varphi,\mathcal{F}\{\alpha x+\beta y\}\rangle = \alpha\langle\varphi,\mathcal{F}\{x\}\rangle+\beta\langle\varphi,\mathcal{F}\{y\}\rangle \\ &= \alpha\langle\mathcal{F}\{\varphi\},x\rangle+\beta\langle\mathcal{F}\{\varphi\},y\rangle\ .\end{aligned}$$

b) Sea $x_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{!} x$. Entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle\mathcal{F}\{\varphi\},x_n-x\rangle = \lim_{n\longrightarrow\infty}\langle\varphi,\mathcal{F}\{x_n-x\}\rangle\ .$$

Puesto que $\varphi\in\overline{\mathcal{S}}^{\,*}$ y $\mathcal{F}\{x_n-x\}\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{!} 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle\mathcal{F}\{\varphi\},x_n-x\rangle &= \left\langle\varphi,\lim_{n\longrightarrow\infty}\mathcal{F}\{x_n-x\}\right\rangle \\ &= \left\langle\varphi,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_n(t)-x(t)]e^{i\omega t}\,dt\right\rangle \\ &= \left\langle\varphi,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\longrightarrow\infty}[x_n(t)-x(t)]e^{i\omega t}\,dt\right\rangle \\ &= \left\langle\varphi,\mathcal{F}\{\lim_{n\longrightarrow\infty}(x_n-x)\}\right\rangle \\ &= \left\langle\mathcal{F}\{\varphi\},\lim_{n\longrightarrow\infty}(x_n-x)\right\rangle\ .\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{F}\{\varphi\}\in\overline{\mathcal{S}}^{\,*}$.

q.e.d.

Ejemplos

1) La delta δ. Sea $x\in\mathcal{S}$ arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}\{\delta\},x\rangle &= \langle\delta,\mathcal{F}\{x\}\rangle = \left\langle\delta,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}x(t)\,dt\right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x(t)\,dt = \left\langle\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}},x\right\rangle\ .\end{aligned}$$

Luego

$$\mathcal{F}\{\delta\} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}\ . \tag{6.2}$$

2) La derivada de la delta δ'. Sea $x \in \mathcal{S}$ arbitrario.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}\{\delta'\}, x\rangle = \langle \delta', \mathcal{F}\{x\}\rangle &= \left\langle \delta', \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} x(t)\, dt \right\rangle \\
&= -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} x(t)\, dt\right]\Bigg|_{s=0} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \frac{\partial}{\partial s} e^{ist}\, dt \Bigg|_{s=0} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ite^{ist}\Big|_{s=0} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) it\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-it}{\sqrt{2\pi}} x(t)\, dt = \left\langle \overline{\frac{-it}{\sqrt{2\pi}}}, x \right\rangle \ .
\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{F}\{\delta'\} = \overline{\frac{(-it)}{\sqrt{2\pi}}} \ . \tag{6.3}$$

3) En general,

$$\mathcal{F}\{\delta^{(n)}\} = \overline{\frac{(-it)^n}{\sqrt{2\pi}}} \ . \tag{6.4}$$

Definición 6.3 *Antitransformada de Fourier en $\overline{\mathcal{S}}^*$. Definimos la antitransformada de Fourier de una distribución $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ como*

$$\boxed{\left\langle \mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}, x\right\rangle = \left\langle \varphi, \mathcal{F}^{-1}\{x\}\right\rangle} \quad \forall x \in \mathcal{S} \tag{6.5}$$

Proposición 6.3 Si $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$, entonces

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{\varphi\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{\varphi\} = \varphi \ . \tag{6.6}$$

(Vale decir, se tiene un teorema de reciprocidad, análogamente al que encontramos en el espacio de funciones $\mathcal{S}$.)

Demostración

$$\left\langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}, x\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}, \mathcal{F}\{x\}\right\rangle = \left\langle \varphi, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{x\}\right\rangle = \langle \varphi, x\rangle \ .$$

q.e.d.

Como en el caso de funciones en $\mathcal{S}$, se cumplen las siguientes dos proposiciones.

Proposición 6.4 Si $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ es una distribución par, entonces

$$\mathcal{F}\{\varphi\} = \mathcal{F}^{-1}\{\varphi\} \ . \tag{6.7}$$

Demostración

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}, x \right\rangle = \left\langle \varphi, \mathcal{F}^{-1}\{x\} \right\rangle = \left\langle \varphi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, x(t) e^{-i\omega t} \right\rangle \ .$$

Siendo φ par podemos cambiar ω por $-\omega$:

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}, x \right\rangle = \left\langle \varphi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, x(t) e^{i\omega t} \right\rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}\{x\} \rangle = \langle \mathcal{F}\{\varphi\}, x \rangle \ ,$$

de modo que

$$\mathcal{F}\{\varphi\} = \mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}$$

si φ es una distribución par.

q.e.d.

Proposición 6.5 Si $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ es una distribución impar, entonces

$$\mathcal{F}\{\varphi\} = -\mathcal{F}^{-1}\{\varphi\} \ .$$

Demostración Ejercicio.

Ejemplo Sea $f(t) = 1$. $f(t)$ es de crecimiento, luego $\overline{f} = \overline{1}$ existe.

Consideremos $\mathcal{F}\{\overline{f}\} = \mathcal{F}\{\overline{1}\}$. Sabemos que, por ser δ una distribución par,

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta\} = \mathcal{F}\{\delta\} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \ ,$$

luego

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{\overline{1}\} = \delta \ .$$

Entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{\overline{1}, \omega\} = \delta(\omega) \ , \tag{6.8}$$

$$\mathcal{F}\{\delta\} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \ . \tag{6.9}$$

Y puesto que de modo puramente *simbólico* escribimos

$$\mathcal{F}\{\overline{1}, \omega\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t}\, dt \ ,$$

$$\mathcal{F}\{\delta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{i\omega t}\, dt \ ,$$

obtenemos las expresiones (en rigor incorrectas):

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, dt \ , \tag{6.10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ . \tag{6.11}$$

Observemos, sin embargo, que aun cuando la integral en el lado derecho de (6.10) no existe en el sentido ordinario, uno puede escribir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t)\, dt = \frac{2}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \cos \omega t\, dt \ ,$$

donde hemos usado el valor principal de la integral de $\operatorname{sen} \omega t$:

$$P\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \omega t\, dt = \lim_{K \longrightarrow \infty} \int_{-K}^{K} \operatorname{sen} \omega t\, dt = 0 \ .$$

Y como la integral de Cesàro de $\cos \omega t$ es

$$^{*}\!\!\int_{0}^{\infty} \cos \omega t\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq 0 \\ \infty & \text{si } \omega = 0 \end{cases} \ ,$$

encontramos una cierta consistencia con el resultado (6.10).

Análogamente a lo que ocurre en el espacio de funciones, se tiene el siguiente par de proposiciones para derivadas de distribuciones:

Proposición 6.6 Sea $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$. Entonces

$$(\mathcal{F}\{\varphi\})^{(n)} = \mathcal{F}\{\overline{(it)^n}\, \varphi\} \ . \tag{6.12}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \left\langle (\mathcal{F}\{\varphi\})^{(n)}, x \right\rangle &= (-1)^n \left\langle \mathcal{F}\{\varphi\}, x^{(n)} \right\rangle = (-1)^n \left\langle \varphi, \mathcal{F}\{x^{(n)}\} \right\rangle \\ &= (-1)^n \left\langle \varphi, (-it)^n \mathcal{F}\{x\} \right\rangle = \left\langle \overline{(it)^n}\, \varphi, \mathcal{F}\{x\} \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{F}\{\overline{(it)^n}\, \varphi\}, x \right\rangle \ . \end{aligned}$$

Así

$$(\mathcal{F}\{\varphi\})^{(n)} = \mathcal{F}\{\overline{(it)^n}\, \varphi\} \in \overline{\mathcal{S}}^* \ .$$

q.e.d.

Proposición 6.7

$$\mathcal{F}\{\varphi^{(n)}\} = \overline{(-i\omega)^n}\, \mathcal{F}\{\varphi\} \ . \tag{6.13}$$

Demostración Ejercicio.

Observemos que si f es una función de crecimiento lento, entonces $\mathcal{F}\{\overline{f}\}$, considerada como una función, no lo es necesariamente. Por ejemplo, $f(t) = 1$ es de crecimiento lento, pero $\mathcal{F}\{\overline{1}\} = \sqrt{2\pi}\,\delta$ no lo es.

Por otra parte, en general, las funciones 1, t, t^2, ... , no tienen transformada de Fourier (no existe $\int_{-\infty}^{\infty} |\, f\,|$). Sin embargo, sí la tienen $\overline{1}$, $\overline{t}$, $\overline{t^2}$, ... , a saber:

$$\mathcal{F}\{\overline{it^n}\} = (\mathcal{F}\{\overline{1}\})^{(n)} = \sqrt{2\pi}\,\delta^{(n)} \ .$$

Vale decir, ¡hemos ampliado (en algún sentido) el espacio de funciones que tienen transformada de Fourier!

Consideremos ahora la distribución δ_a tal que $\langle \delta_a, x(t)\rangle = x(a)$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\{\delta_a\}, x\rangle = \langle \delta_a, \mathcal{F}\{x,\omega\}\rangle &= \left\langle \delta_a, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i\omega t}\,dt \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{iat}\,dt = \left\langle \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iat}}, x \right\rangle \ , \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathcal{F}\{\delta_a\} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iat}} \ . \tag{6.14}$$

Sustituyendo a por $-a$:

$$\mathcal{F}\{\delta_{-a}\} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-iat}} \ .$$

Luego

$$\mathcal{F}\{\delta_a + \delta_{-a}\} = \overline{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cos(at)}$$

y

$$\mathcal{F}\{\delta_a - \delta_{-a}\} = \overline{\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{sen}(at)} \ .$$

En consecuencia,

$$\mathcal{F}\{\overline{\cos(at)}\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta_a + \delta_{-a}) = \mathcal{F}^{-1}\{\overline{\cos(at)}\} \ , \tag{6.15}$$

$$\mathcal{F}\{\overline{\mathrm{sen}(at)}\} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta_a - \delta_{-a}) = -\mathcal{F}^{-1}\{\overline{\mathrm{sen}(at)}\} \ , \tag{6.16}$$

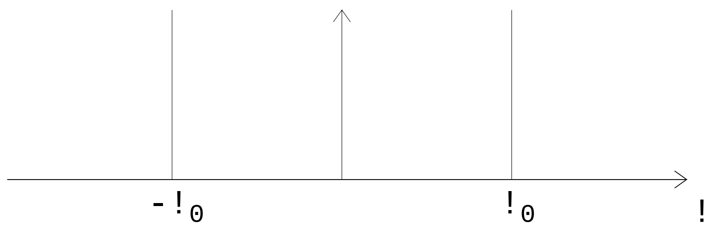
donde hemos usado el hecho de que $\delta_a + \delta_{-a}$ es una distribución par y que $\delta_a - \delta_{-a}$ es impar.

En textos de Física encontraremos las relaciones (6.15) y (6.16) en la forma:

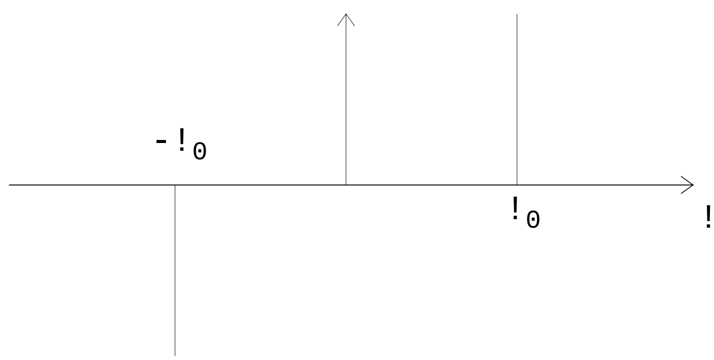
$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t), \omega\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \ ,$$

$$\mathcal{F}\{\mathrm{sen}(\omega_0 t), \omega\} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \ .$$

Vale decir, al graficar el espectro de frecuencias de $\cos(\omega_0 t)$ tendríamos dos *peaks*, en $\pm\omega_0$:

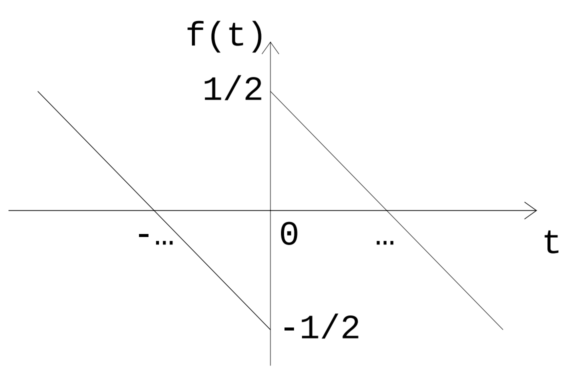


y en el caso de $\mathrm{sen}(\omega_0 t)$ el peak en $-\omega_0$ sería negativo:



Terminemos este Capítulo encontrando una representación útil para la delta. Consideremos la función "dientes de sierra":

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}(t+\pi) & -\pi \leq t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ -\frac{1}{2\pi}(t-\pi) & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$



La función es periódica:

$$f(t+2m\pi)=f(t) \quad \forall\, m\in\mathbb{Z}\ .$$

Es pues expandible en una serie de Fourier impar:

$$f(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \operatorname{sen}(\nu t)\ ,$$

con

$$b_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\operatorname{sen}(\nu t')\,dt'=\frac{1}{\pi\nu}\ ,$$

entonces

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\nu t)}{\nu}\ .$$

Consideremos la distribución asociada

$$\overline{f(t)}=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{\left(\frac{\operatorname{sen}(\nu t)}{\nu}\right)}\ ,$$

y derivémosla:

$$\left(\overline{f(t)}\right)'=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\overline{\operatorname{sen}(\nu t)}}{\nu}\right)'=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{\left(\frac{\operatorname{sen}(\nu t)}{\nu}\right)'}=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{\cos(\nu t)}\ .$$

Por otra parte,

$$\left(\overline{f(t)}\right)'=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{2n\pi}-\overline{\frac{1}{2\pi}}$$

(la demostración queda como ejercicio), luego

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{\cos(\nu t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{2n\pi}-\overline{\frac{1}{2\pi}}\ ,$$

es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{2n\pi}=\overline{\frac{1}{2\pi}}+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{\cos(\nu t)}\ .$$

Restringiéndonos al intervalo $[-\pi,\pi]$, encontramos la relación:

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos(\nu t)\ ,\quad t\in[-\pi,\pi]\ . \tag{6.17}$$