Capítulo 7

Convolución de distribuciones

7.1 Definiciones

Sean x, $y \in \mathcal{S}$ y sean $\overline{x}$, $\overline{y} \in \overline{\mathcal{S}}^*$ sus funcionales asociados. Hemos definido

$$\begin{aligned}
\overline{x} + \overline{y} &\equiv \overline{x + y} \\
\overline{y}\,' &\equiv \overline{y\,'} \\
\mathcal{F}\{\overline{y}\} &\equiv \overline{\mathcal{F}\{y\}} \ .
\end{aligned}$$

En forma análoga, definiremos a continuación, el producto de convolución.

Definición 7.1 *Producto de convolución de funcionales*

Sea $x * y \in \mathcal{S}$ y $\overline{x * y} \in \overline{\mathcal{S}}^*$ el funcional asociado. Definimos el producto de convolución de dos funcionales como

$$\boxed{\overline{x} * \overline{y} = \overline{x * y} \ .} \tag{7.1}$$

Evaluemos

$$\begin{aligned}
\langle \overline{y * z}, x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} [y * z](s) x(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(s-t)z(t)\, dt\right] x(s)\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(s-t)x(s)\, ds\right] z(t)\, dt \ .
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = s - t$,

$$\begin{aligned}
\langle \overline{y * z}, x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(u)x(u+t)\, du\right] z(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(u+t)y(u)z(t)\, dt\, du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(u+t)z(t)\, dt\right] y(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} y(u)\, \langle \overline{z}(t), x(u+t)\rangle \, du \ .
\end{aligned}$$

La última igualdad tiene sentido sólo si la función de u $\langle \overline{z}(t), x(u+t)\rangle \in \mathcal{S}$. Si lo es, podemos escribir.

$$\langle \overline{y * z}, x\rangle = \langle \overline{y}(u), \langle \overline{z}(t), x(u+t)\rangle\rangle \ .$$

El lado derecho es un número complejo, que se puede reescribir:

$$\begin{aligned}
\langle \overline{y * z}, x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(u)x(u+t)\,du\right] z(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\,\langle \overline{y}(u), x(u+t)\rangle\,dt \\
&= \langle \overline{z}(t), \langle \overline{y}(u), x(u+t)\rangle\rangle \ .
\end{aligned}$$

Éste es otro número complejo, que tiene sentido sólo si la función de t $\langle \overline{y}(u), x(u+t)\rangle \in \mathcal{S}$. Por lo tanto, resumiendo,

$$\langle \overline{y} * \overline{z}, x\rangle = \langle \overline{y * z}, x\rangle = \langle \overline{y}(u), \langle \overline{z}(t), x(u+t)\rangle\rangle = \langle \overline{z}(t), \langle \overline{y}(u), x(u+t)\rangle\rangle \ .$$

Falta demostrar que las igualdades última y penúltima tienen sentido.

Proposición 7.1 Si x, $z \in \mathcal{S}$ entonces $\langle \overline{z}(t), x(u+t)\rangle \in \mathcal{S}(u)$.

Demostración Sabemos que si x, $z \in \mathcal{S}$ entonces:

$$\lim_{t\to\pm\infty} t^m x^{(n)}(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\pm\infty} t^m z^{(n)}(t) = 0 \ , \quad \forall\, m \text{ y } n \in \mathbb{N} \ .$$

Definamos

$$g(u) \equiv \langle \overline{z}(t), x(u+t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)x(u+t)\,dt \ .$$

Tomemos las derivadas de $g(u)$:

$$\begin{aligned}
g'(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)x'(u+t)\,dt \\
&\vdots \\
g^{(n)} &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)x^{(n)}(u+t)\,dt \ .
\end{aligned}$$

Luego g es infinitamente diferenciable. Ahora consideremos el límite

$$\lim_{|\,u\,|\to\infty}\left[u^m g^{(n)}(u)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \lim_{|\,u\,|\to\infty}\left[u^m x^{(n)}(u+t)\right]\,dt = 0 \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N} \ .$$

Luego $g(u) \in \mathcal{S}$.

q.e.d.

Definición 7.2 *Producto de convolución entre una distribución y una función* Sean $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^{\,*}$, $f \in \mathcal{S}$. *Definimos*

$$[\varphi * \overline{f}](u) = \langle \varphi_t, f(u-t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)f(u-t)\,dt \ ,$$

usando la notación como funciones. Esta definición es consistente con los resultados anteriores.

$$\begin{aligned}
\langle \varphi * \overline{f}, x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi * \overline{f}](u) x(u)\, du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} du x(u) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(u-t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt \varphi(t) \int_{-\infty}^{\infty} x(u) f(u-t)\, du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt \varphi(t) \int_{-\infty}^{\infty} x(v+t) f(v)\, dv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt \varphi(t) \left\langle \overline{f(v)}, x(v+t) \right\rangle \\
&= \left\langle \varphi(t), \left\langle \overline{f(v)}, x(v+t) \right\rangle \right\rangle \ .
\end{aligned}$$

$\left\langle \overline{f(v)}, x(v+t) \right\rangle$ no necesariamente pertenece a $\mathcal{S}$, que es lo que se necesita para que la última expresión tenga sentido. Por ejemplo, si $f = 1$,

$$\left\langle \overline{f(v)}, x(v+t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(v+t)\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, du = \text{cte} \notin \mathcal{S} \ .$$

Sin embargo, al menos es una función infinitamente derivable. El problema anterior se presenta por supuesto cuando se trata de dos distribuciones arbitrarias.

Definición 7.3 *Producto de convolución de distribuciones* *Sean $\varphi, \psi \in \overline{\mathcal{S}}^*$, si $\langle \psi(t), x(t+u)\rangle \in \mathcal{S}(u)\ \forall\, x \in \mathcal{S}$, se define $\varphi * \psi$ como:*

$$\langle \varphi * \psi, x\rangle \equiv \langle \varphi(u), \langle \psi(t), x(u+t)\rangle\rangle \ .$$

Si además $\langle \varphi(t), x(u+t)\rangle \in \mathcal{S}(t)$, entonces también existe $\psi * \varphi$.

Proposición 7.2 (Sin demostración)
Una condición suficiente para que valga $\langle \psi(t), x(t+u)\rangle \in \mathcal{S}(u)$, es que ψ tenga soporte finito.

7.2 Propiedades de la convolución de distribuciones

1) ¿Conmutatividad?
No, sólo en algunos casos $\varphi * \psi$ y $\psi * \varphi$ existen ambas.

2) ¿Asociatividad?
Sí. Sean $\varphi, \psi, \chi \in \overline{\mathcal{S}}^*$, con

$$\langle \psi(u), y(u+t)\rangle \in \mathcal{S}(t) \quad \text{y} \quad \langle \chi(t), x(u+t)\rangle \in \mathcal{S}(u) \quad \forall\, x, y \in \mathcal{S} \ ,$$

entonces

$$\begin{aligned}\langle(\varphi * \psi) * \chi, x\rangle &= \langle(\varphi * \psi)(u), \langle\chi(t), x(t+u)\rangle\rangle \\ &= \langle\varphi(v), \langle\psi(u), \langle\chi(t), x(t+u+v)\rangle\rangle\rangle \ .\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\langle\varphi * (\psi * \chi), x\rangle &= \langle\varphi(v), \langle\psi * \chi(u), x(u+v)\rangle\rangle \\ &= \langle\varphi(v), \langle\psi(u), \langle\chi(t), x(t+u+v)\rangle\rangle\rangle \ ,\end{aligned}$$

luego

$$\varphi * (\psi * \chi) = (\varphi * \psi) * \chi = \varphi * \psi * \chi \ .$$

3) ¿Distributividad?
Sí. Sean $\varphi, \psi, \chi \in \overline{\mathcal{S}}^*$, con $\langle\chi(t), x(t+u)\rangle \in \mathcal{S}(u)\ \forall\, x \in \mathcal{S}$, entonces

$$\begin{aligned}\langle(\varphi + \psi) * \chi, x\rangle &= \langle(\varphi + \psi)(u), \langle\chi(t), x(t+u)\rangle\rangle \\ &= \langle\varphi(u), \langle\chi(t), x(t+u)\rangle\rangle + \langle\psi(u), \langle\chi(t), x(t+u)\rangle\rangle \\ &= \langle\varphi * \chi, x\rangle + \langle\psi * \chi, x\rangle = \langle\varphi * \chi + \psi * \chi, x\rangle \ .\end{aligned}$$

4) La δ es elemento neutro derecho:

$$\langle\varphi * \delta, x\rangle = \langle\varphi(u), \langle\delta(t), x(t+u)\rangle\rangle = \langle\varphi(u), x(u)\rangle = \langle\varphi, x\rangle \ ,$$

por lo tanto, $\forall\, \varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$, tenemos

$$\boxed{\varphi * \delta = \varphi} \tag{7.2}$$

5) Papel de δ' como factor derecho:

$$\langle\varphi * \delta', x\rangle = \langle\varphi(u), \langle\delta'(t), x(t+u)\rangle\rangle = -\,\langle\varphi, x'\rangle = \langle\varphi', x\rangle \ .$$

Luego podemos escribir, $\forall\, \varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$,

$$\boxed{\varphi * \delta' = \varphi'} \tag{7.3}$$

Vale decir, la derivación es un caso particular de la convolución. 6) δ_a como factor derecho

$$\langle\varphi * \delta_a, x\rangle = \langle\varphi(u), \langle\delta(t-a), x(t+u)\rangle\rangle = \langle\varphi(u), x(a+u)\rangle \ .$$

Sea $f \in \mathcal{S}$ y $\overline{f} \in \overline{\mathcal{S}}^*$ su funcional asociado. Entonces

$$\left\langle\overline{f} * \delta_a, x\right\rangle = \left\langle\overline{f}(u), x(a+u)\right\rangle = \left\langle\overline{f}(u-a), x(u)\right\rangle \ .$$

Es decir: $\overline{f} \in \overline{\mathcal{S}}^*$, escribimos:

$$\boxed{\overline{f} * \delta_a = \overline{f(t-a)}} \tag{7.4}$$

El desplazamiento es un caso particular de la convolución.

7) El producto de deltas:

$$\langle \delta_a * \delta_b, x \rangle = \langle \delta(u-a), \langle \delta(t-b), x(t+u) \rangle \rangle = \langle \delta(u-a), x(b+u) \rangle = x(a+b) = \langle \delta_{a+b}, x \rangle \ .$$

Luego

$$\boxed{\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}} \tag{7.5}$$

8) Existen divisores del cero. Sea C una función constante en un intervalo finito y cero en el resto.

$$\overline{C} * \delta' = \overline{C}\,' = \overline{C'} = \overline{0} = 0 \ ,$$

o sea que se tiene $\varphi * \psi = 0$ sin que $\varphi = 0$ ni $\psi = 0$. Consecuencia de lo anterior es que si α, β, $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}^*$, las ecuaciones

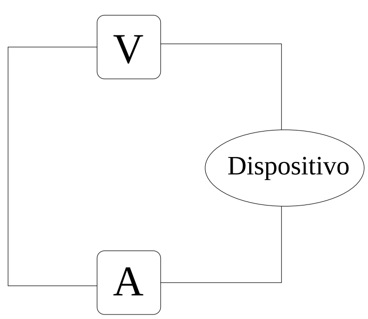
$$\alpha * (\beta - \gamma) = 0 \quad \text{o} \quad \alpha * \beta = \alpha * \gamma \not\Rightarrow \beta = \gamma \ ,$$

aun si $\alpha \neq 0$,

9) Las ecuaciones $\alpha * \beta = \psi$ o $\beta * \alpha = \psi$ puede tener más de una solución α para β, ψ dados. Por ejemplo, para $\beta = \delta'$ y $\psi = \overline{0}$ la ecuación $\alpha * \beta = \psi$ tiene como soluciones $\alpha = \overline{0}$, $\alpha = \overline{C}$ entre otras.

7.3 Uso de convolución en Física

Consideremos el siguiente circuito:



$\boxed{\text{V}}$ Mide la *fem* $e(t)$ aplicada al dispositivo. Esto corresponde al "estímulo" o "excitación" que perturba el sistema.

$\boxed{\text{A}}$ Mide la corriente $i(t)$ que circula por el sistema. Ésta corresponde a la "respuesta" del sistema frente a lo que lo perturba.

Las siguientes premisas deben ser satisfechas por el sistema:

i Si $e(t) = 0$ para $t < t_1$, entonces $i(t) = 0$ para $t < t_1$.

ii Si a las excitaciones $e_{1,2}(t)$ les corresponden respuestas $i_{1,2}(t)$, entonces a una excitación $\alpha\, e_1(t) + \beta\, e_2(t)$ le corresponde una respuesta $\alpha\, i_1(t) + \beta\, i_2(t)$. (Linealidad.)

iii Si a la excitación $e(t)$ le corresponde la respuesta $i(t)$, entonces a $e(t-a)$ le corresponde $i(t-a)$. (Desplazamiento.)

iv Si a la excitación $e_n(t)$ le corresponde la respuesta $i_n(t)$, entonces a $\lim_{n\to\infty} e_n(t)$ le corresponde $\lim_{n\to\infty} i(t)$. (Continuidad.)

Teorema 7.1 Sea la distribución $G(t)$ la respuesta a la excitación $\delta(t)$. (Esto corresponde a una excitación "percusional", nula para todo tiempo salvo en el instante $t = 0$). Entonces la respuesta $\bar{\imath}$ a cualquier excitación $\overline{e(t)}$ se obtiene por el producto de convolución

$$\bar{\imath} = G * \bar{e} \ . \tag{7.6}$$

Así pues, basta conocer la respuesta de un sistema (cualquier sistema con las premisas anteriores, esperables para un sistema físico) a un estímulo elemental, para conocer la respuesta del sistema a cualquier otro estímulo, a través del producto de convolución. Situaciones similares se presentan en otros problemas físicos: basta conocer el campo eléctrico producido por una carga puntual para saber el campo eléctrico producido por una distribución arbitraria de carga.

A continuación damos las líneas generales de una eventual demostración del anterior teorema.

i. Si $\bar{e} = \delta$ entonces $\bar{\imath} = G = G * \delta = G * \bar{e}$.

ii. Si $\bar{e} = \delta_b = \delta_b(t) = \delta(t-b)$ entonces $\bar{\imath} = G(t-b) = G(t) * \delta(t-b) = G * \delta_b = G * \bar{e}$.

iii. Si $\bar{e} = \displaystyle\sum_\nu \alpha_\nu \delta_{t_\nu}(t) = \sum_\nu \alpha_\nu \delta(t-t_\nu)$ entonces la respuesta será, usando las propiedades del sistema, $\bar{\imath} = \sum_\nu \alpha_\nu G_\nu(t-t_\nu) = \sum_\nu \alpha_\nu G(t) * \delta(t-t_\nu) = G(t) * \bar{e}(t) = G * \bar{e}$.

iv. Sea $e(t)$ nula para $t < t_0$, de crecimiento lento, seccionalmente continua y derivable, de modo que $\bar{e} \in \overline{\mathcal{S}}^*$ existe.

$$\langle \bar{e}, x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) x(t)\, dt = \lim_{N\to\infty} \sum_\nu^N \alpha_\nu x(t_\nu) = \left\langle \lim_{N\to\infty} \sum_\nu^N \alpha_\nu \delta(t-t_\nu), x \right\rangle \ .$$

Si $e(t) = \displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_\nu^N \alpha_\nu \delta(t-t_\nu)$, existe la esperanza de que esto permita expresar toda la respuesta de la forma

$$\bar{\imath}(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_\nu^N \alpha_\nu G(t-t_\nu) = G(t) * \lim_{N\to\infty} \sum_\nu^N \alpha_\nu \delta(t-t_\nu) = G * \bar{e} \ .$$