Capítulo 8

La función Gamma

La función Gamma aparece en diversos problemas de Física, tales como la normalizacion de la función de onda de Coulomb y en el cómputo de probabilidades en mecánica estadística. Por tanto, su estudio es relevante, al menos en forma somera.

8.1 La función factorial

Consideremos la integral:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = -\left.\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right|_0^\infty = \frac{1}{\alpha} \ .$$

Derivando n veces respecto a α ambos lados de esta expresión:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\, dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \ .$$

Poniendo $\alpha = 1$ encontramos una expresión integral para la función factorial:

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx \ , \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

A partir de este resultado podemos extender la función factorial para $n = 0$:

$$0! = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = -\left. e^{-x}\right|_0^\infty = 1 \ .$$

Así, tenemos en general,

$$\boxed{n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx \ , \qquad n = 0, 1, 2 \ldots} \tag{8.1}$$

8.2 La función Gamma

Definimos la función Gamma por:

$$\boxed{\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx \ , \qquad p > 0 \ .} \tag{8.2}$$

Vale decir, es una generalización de la función factorial para números reales arbitrarios.

Observemos que:

- Para $0 < p < 1$ la integral es impropia porque x^{p-1} llega a ser infinito en el límite superior. Sin embargo, para $p > 0$ la integral es convergente.
- Para $p \leq 0$ la integral diverge y no puede usarse para definir $\Gamma(p)$.

8.2.1 Relación con la función factorial

De la definición de la función Gamma (8.2), se tiene

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n! \ , \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}. \tag{8.3}$$

8.2.2 Relación de recurrencia

De la definición (8.2):

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\, dx = p! \ , \qquad p > -1,\ p \in \mathbb{R}.$$

Integrando por partes:

$$\Gamma(p+1) = -x^p e^{-x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-x}\right) p x^{p-1}\, dx = p\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, dx = p\Gamma(p) \ ,$$

luego

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)} \tag{8.4}$$

8.2.3 Función Gamma de números negativos

Ya observamos que la expresión integral (8.2) no es adecuada para su extensión a números negativos. Sin embargo, ello sí es posible a través de la relación de recurrencia (8.4). Definimos pues $\Gamma(p)$ para $p \leq 0$ usando la relación de recurrencia

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1) \ . \tag{8.5}$$

Por ejemplo,

$$\Gamma(-1.5) = \frac{1}{-1.5}\Gamma(-0.5) = \frac{1}{-1.5}\frac{1}{-0.5}\Gamma(0.5) \ .$$

Observemos, sin embargo, que como $\Gamma(1) = 1$, de (8.5) se sigue que

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \xrightarrow[p\to 0]{} \infty \ .$$

En virtud de (8.5), éste es el valor de $\Gamma(p)$ no sólo para $p = 0$, sino para todos los enteros negativos.

8.2.4 Algunos resultados

(a) Evaluemos $\Gamma(1/2)$. De la definición (8.2),

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\, dt \ .$$

Con el cambio de variables $t = y^2$,

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy \ .$$

Entonces

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 4\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx\right) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \ .$$

Reescribiendo la integral en coordenadas polares,

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 4\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = 4\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr = 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^\infty = 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) \ .$$

Luego

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \ . \tag{8.6}$$

(b)

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi p)} \ . \tag{8.7}$$

8.3 Función Beta

Definimos la función Beta por:

$$\boxed{B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \ , \qquad p>0,\ q>0} \tag{8.8}$$

Se puede demostrar que

$$B(p,q) = B(q,p) \ . \tag{8.9}$$

Otras formas de expresar $B(p,q)$ son:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,d\theta\ , \tag{8.10}$$

$$B(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy\ . \tag{8.11}$$

La función Beta se relaciona con la función Gamma a través de la expresión:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ . \tag{8.12}$$

Demostración Ejercicio.

8.4 Notación doble factorial

Definimos el *doble factorial* como el producto de los n primeros enteros impares o pares:

$$(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)\ , \tag{8.13}$$

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\ . \tag{8.14}$$

Claramente

$$(2n)!! = 2^n n!\ , \tag{8.15}$$

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}\ . \tag{8.16}$$

8.5 Fórmula de Stirling

(Una idea de la demostración.)

Deseamos encontrar una expresión asintótica para $\Gamma(p)$ para p grande. Consideremos

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} e^{p\ln x - x}\,dx\ .$$

Con el cambio de variables $x = p + y\sqrt{p}$, obtenemos

$$\Gamma(p+1) = \int_{-\sqrt{p}}^{\infty} e^{p\ln(p+y\sqrt{p}\,)-p-y\sqrt{p}}\sqrt{p}\,dy\ .$$

Para p grande, se tiene

$$\ln(p+y\sqrt{p}\,) = \ln p + \ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{p}}\right) \xrightarrow[p\to\infty]{} \ln p + \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{y^2}{2p} + \cdots\ .$$

De este modo,

$$
\begin{aligned}
\Gamma(p+1) &= \int_{-\sqrt{p}}^{\infty} e^{p\ln p + y\sqrt{p} - y^2/2 - p - y\sqrt{p}} \sqrt{p}\, dy \\
&= e^{p\ln p - p}\sqrt{p} \int_{-\sqrt{p}}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy \\
&= p^p e^{-p}\sqrt{p}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy - \int_{-\infty}^{-\sqrt{p}} e^{-y^2/2}\, dy\right) \\
&\xrightarrow[p\to\infty]{} p^p e^{-p}\sqrt{p}\left(\sqrt{2\pi} - 0\right) \ ,
\end{aligned}
$$

obteniendo así la *fórmula de Stirling*:

$$\boxed{\Gamma(p+1) \xrightarrow[p\to\infty]{} p^p e^{-p}\sqrt{2\pi p}} \tag{8.17}$$

Con más trabajo es posible encontrar la expansión asintótica de $\Gamma(p+1)$:

$$\Gamma(p+1) = p^p e^{-p}\sqrt{2\pi p}\left(1 + \frac{1}{12p} + \frac{1}{288p^2} + \cdots\right) \ . \tag{8.18}$$

8.6 Otras funciones relacionadas

1. *Función digamma*:

$$\digamma(z) = \frac{d}{dz}\ln(z!) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+z)} \ , \tag{8.19}$$

con

$$\gamma = 0.577215664901\ldots \tag{8.20}$$

la constante de Euler-Mascheroni.

2. *Función poligamma*:

$$\frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln(z!) = \digamma^{(m)}(z) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{m+1}} \ . \tag{8.21}$$

Observemos que

$$\digamma^{(m)}(0) = (-1)^{m+1} m!\zeta(m+1) \ , \qquad m = 1,\, 2,\, 3\ \ldots \ , \tag{8.22}$$

en términos de la función *zeta de Riemann*:

$$\zeta(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} \ , \qquad m = 1,\, 2,\, 3\ \ldots \tag{8.23}$$

3. *Función Beta incompleta*:

$$B_x(p,q) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \ , \qquad 0 \le x \le 1,\ p>0,\ q>0. \tag{8.24}$$

Claramente

$$B_{x=1}(p,q) = B(p,q) \ .$$

4. *Funciones Gamma incompletas*:

$$\gamma(a,x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1}\,dt \ , \qquad \mathrm{Re}(a) > 0 \ , \tag{8.25}$$

y

$$\Gamma(a,x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1}\,dt \ . \tag{8.26}$$

Se tiene

$$\gamma(a,x) + \Gamma(a,x) = \Gamma(a) \ . \tag{8.27}$$

Sus expansiones en serie:

$$\gamma(n,x) = (n-1)!\left(1 - e^{-x}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!}\right) \ , \tag{8.28}$$

$$\Gamma(n,x) = (n-1)!e^{-x}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!} \ , \tag{8.29}$$

con $n = 1, 2 \ldots$

5. *Integrales de error*:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt \ , \tag{8.30}$$

$$\mathrm{erfc}(z) = 1 - \mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-t^2}\,dt \ . \tag{8.31}$$

En términos de las funciones Gamma incompletas:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right) \ , \tag{8.32}$$

$$\mathrm{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right) \ . \tag{8.33}$$