Capítulo 9

Transformada de Laplace

9.1 Definición

Definición 9.1 *Definimos la* **transformada de Laplace** *de una función $f(t)$ por*

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t), s\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt} \quad s \in \mathbb{C}\ . \tag{9.1}$$

Definición 9.2 *Una función $f : [0, \infty) \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ es de* **orden exponencial** *si $f(t)$ es seccionalmente continua y derivable en $0 \leq t < \infty$ y*

$$|\, f(t)\, | \leq A e^{s_0 t} \quad \forall\, t \geq 0 \quad A,\, s_0 \in \mathbb{R}. \tag{9.2}$$

Proposición 9.1 Sea f un función de orden exponencial. Entonces la transformada de Laplace, $\mathcal{L}\{f\}$, existe en el semiplano $\mathrm{Re}[s] > s_0$.

Demostración

$$\begin{aligned} |\, \mathcal{L}\{f\}\, | &= \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq \int_0^\infty \left| e^{-st} \right| |\, f(t)\, |\, dt \leq A \int_0^\infty \left| e^{-st} \right| e^{s_0 t}\, dt \\ &= A \int_0^\infty \left| e^{-i\,\mathrm{Im}[s]t} \right| e^{-(\mathrm{Re}[s]-s_0)t}\, dt = A \int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}[s]-s_0)t}\, dt < \infty \quad \forall\ \mathrm{Re}[s] > s_0\ . \end{aligned}$$

q.e.d.

Proposición 9.2 La integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ converge uniformemente para todo s tal que $\mathrm{Re}[s] \geq s_1 > s_0$.

Demostración Si $\epsilon > 0$, afirmamos que existe $M(\epsilon)$ independiente de s tal que

$$\left| F(s) - \int_0^M dt\, e^{-st} f(t) \right| = \left| \int_M^\infty dt\, e^{-st} f(t) \right| < \epsilon\ .$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\left|\int_M^\infty dt\, e^{-st}f(t)\right| &\leq \int_M^\infty dt\,\left|e^{-st}f(t)\right| \leq \int_M^\infty dt\, Ae^{-t(\mathrm{Re}[s]-s_0)}\\ &\leq \int_M^\infty dt\, Ae^{-t(s_1-s_0)} = \frac{A}{s_1-s_0}e^{-M(s_1-s_0)} < \epsilon\ ,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se satisface escogiendo

$$M > \frac{1}{s_1-s_0}\ln\left[\frac{A}{\epsilon(s_1-s_0)}\right]\ .$$

q.e.d.

Proposición 9.3 $F(s)$ es holomorfa (analítica) en $\mathrm{Re}[s] \geq s_1 > s_0$, es decir, la derivada $F'(s)$ existe en dicho semiplano.

Demostración En virtud de la convergencia uniforme, podemos pasar la derivada dentro de la integral:

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)\,dt = -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)\,dt\ ,$$

luego

$$|\,F'(s)\,| \leq \int_0^\infty \left|e^{-st}\right| t\,|\,f(t)\,|\,dt \leq A\int_0^\infty te^{(s_0-s_1)t}\,dt\ ,$$

y la última integral existe (es finita), independiente de s.

q.e.d.

En general, existe

$$F^{(n)}(s) = \int_0^\infty (-t)^n f(t)e^{-st}\,dt\ . \tag{9.3}$$

Proposición 9.4

$$\lim_{\mathrm{Re}[s]\to\infty} F(s) = 0\ . \tag{9.4}$$

Demostración

$$\lim_{\mathrm{Re}[s]\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-i\,\mathrm{Im}[s]t}\left(\lim_{\mathrm{Re}[s]\to\infty} e^{-\,\mathrm{Re}[s]t}\right)dt = 0\ .$$

q.e.d.

Notemos, como consecuencia de esta proposición, que 1, s, s^2 o cualquier polinomio, no pueden ser transformadas de Laplace de ninguna función. Sí pueden serlo, en cambio, $1/s$ o, en general, funciones racionales con el grado del denominador superior al del numerador.

Ejemplo Sea $f(t) = \cos at$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos at, s\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cos(at)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{iat} - e^{-iat}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) \qquad (\text{si } \mathrm{Re}[s] > 0) \\
&= \frac{s}{a^2+s^2}\ .
\end{aligned}$$

9.2 Inversión de la transformada de Laplace

Sea f una función de orden exponencial, tal que $f(t) = 0$ si $t < 0$. Sean $F(s) = \mathcal{L}\{f, s\}$ y $\sigma > s_0$. Observemos que

$$g(t) = f(t)e^{-\sigma t} \tag{9.5}$$

es módulo integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, g \,| < \infty\ ,$$

luego la transformada de Fourier de $g(t)$ existe. Se tiene

$$\mathcal{F}\{g(t), u\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty g(t)e^{itu}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(t)e^{-(\sigma-iu)t}\,dt$$

$$\mathcal{F}\{g(t), u\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{L}\{f(t), \sigma - iu\}\ . \tag{9.6}$$

Usando el teorema de reciprocidad de la transformada de Fourier:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\{g(t), u\}e^{-iut}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{L}\{f, \sigma - iu\}e^{-iut}\,du\ .$$

Con el cambio de variable $s = \sigma - iu$,

$$g(t) = \frac{i}{2\pi}\int_{\sigma+i\infty}^{\sigma-i\infty}\mathcal{L}\{f, s\}e^{(s-\sigma)t}\,ds = \frac{e^{-\sigma t}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathcal{L}\{f, s\}e^{st}\,ds\ .$$

Finalmente

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathcal{L}\{f, s\}e^{st}\,ds\ . \tag{9.7}$$

Por lo tanto, si la transformada de Laplace de una función $f(t)$ está dada por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t), s\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt \ , \qquad s > s_0 \ ,$$

entonces $f(t)$ viene dada por la antitransformada de Laplace:

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s), t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) e^{st}\, ds \ , \qquad \sigma > s_0 \ .} \tag{9.8}$$

La expresión (9.8) se conoce como la *integral de inversión de Mellin.*

Observemos que σ es arbitrario, en tanto sea mayor que s_0. ¿Cómo es posible que la integral de Mellin [igual a $f(t)$] sea independiente de σ? Para verificarlo, necesitamos la siguiente proposición:

Proposición 9.5

$$\lim_{\mathrm{Im}[s] \to \pm\infty} F(s) = 0 \ . \tag{9.9}$$

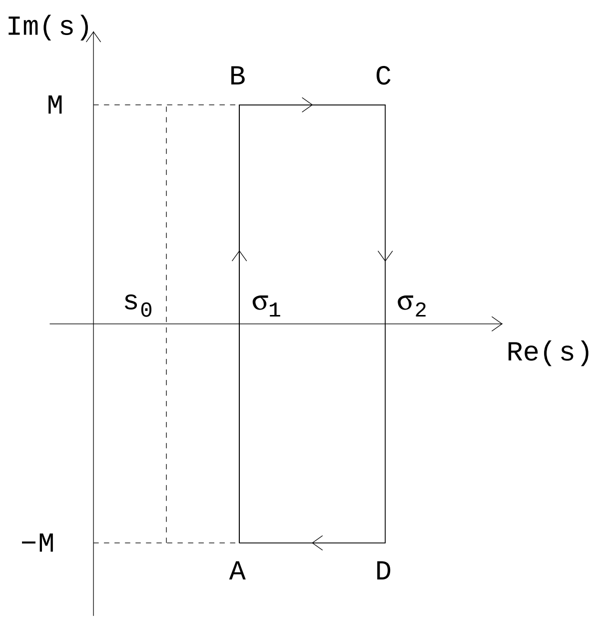
Demostración Sea $s = s_R + i\omega$. Entonces, por (9.6),

$$\mathcal{L}\{f, s\} = \mathcal{L}\{f, s_R + i\omega\} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f e^{-s_R t}, -\omega\} \xrightarrow[\omega \to \pm\infty]{} 0 \ ,$$

donde el último límite se sigue de las propiedades de la transformada de Fourier. Luego hemos demostrado la proposición.

q.e.d.

Ahora podemos discutir la independencia de σ de la integral de Mellin. En efecto, consideremos el circuito de integración:



El contorno $ABCD$ no encierra singularidades, y las integrales a lo largo de CB y AD se van a cero cuando $M = \mathrm{Im}[s] \longrightarrow \infty$ [ver (9.9)]. Luego, por el teorema de Cauchy,

$$\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} ds\, e^{ts} F(s) = \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} ds\, e^{ts} F(s) \ , \qquad \sigma_1,\, \sigma_2 > s_0,$$

lo que muestra la independencia en σ.

Una consecuencia del teorema de inversión de la transformada de Laplace es que si dos funciones son distintas, entonces sus transformadas de Laplace también lo son.

Ejemplo Consideremos la función escalón de Heaviside

$$h(t) = \frac{1 + \mathrm{sgn}(t)}{2} \ .$$

Su transformada de Laplace es

$$H(s) = \mathcal{L}\{h, s\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s} \ .$$

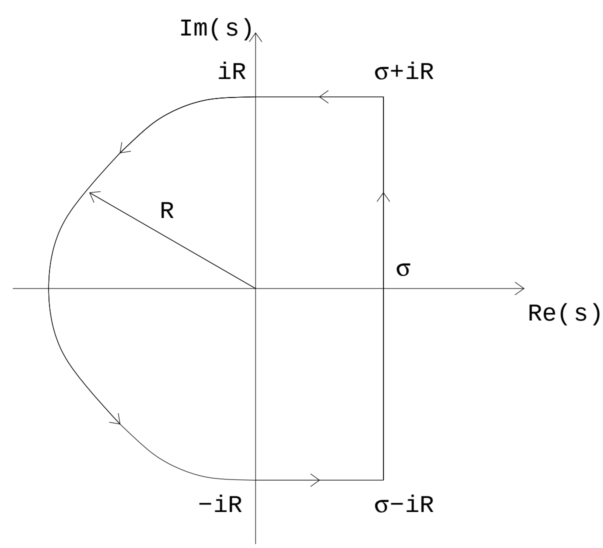
Observemos que $h(t)$ es de crecimiento exponencial con $s_0 = 0$ y, consistentemente, $H(s)$ es holomorfa en el semiplano $\mathrm{Re}[s] > 0$.

Invirtiendo la transformada de Laplace, deberíamos tener

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}, t\right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{s} e^{st}\, ds \ .$$

¿Será cierto? Comprobarlo exigirá un poco de trabajo al integrar en el plano complejo.

i) $t > 0$. Consideremos el siguiente camino de integración:



Sobre los segmentos horizontales:

$$\left| \int \frac{e^{ts}}{s}\, ds \right| = \left| \int_0^\sigma \frac{e^{t(x\pm iR)}}{x \pm iR}\, dx \right| \leq \int_0^\sigma \frac{|\, e^{tx}\, |\, |\, e^{itR}\, |}{|\, x \pm iR\, |}\, dx \leq \frac{\sigma e^{t\sigma}}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \ , \qquad t > 0 \ .$$

Sobre el segmento circular, se tiene

$$z = iRe^{i\varphi} \ , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \ .$$

Luego

$$\left| \int \frac{e^{ts}}{s}\, ds \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{tz}(-Re^{i\varphi})}{iRe^{i\varphi}}\, d\varphi \right| \leq \int_0^\pi e^{-tR \operatorname{sen}\varphi}\, d\varphi \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{tR\varphi}{2}}\, d\varphi \ .$$

La última desigualdad se sigue del hecho de que

$$\operatorname{sen}\varphi \geq \frac{\varphi}{2} \qquad \text{si } 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \ ,$$

de modo que, si $t > 0$,

$$-tR \operatorname{sen}\varphi \leq -tR\frac{\varphi}{2} \ .$$

Por tanto,

$$\left| \int \frac{e^{ts}}{s}\, ds \right| \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{tR\varphi}{2}}\, d\varphi = \frac{4}{tR}\left(1 - e^{-\frac{tR\pi}{4}}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \qquad t > 0 \ .$$

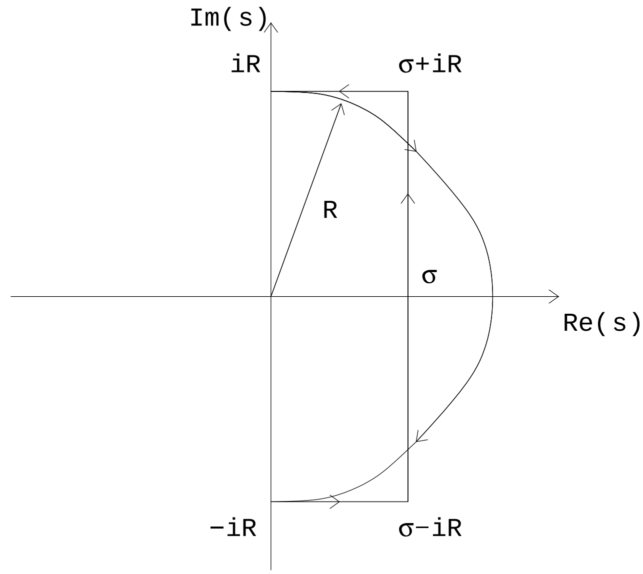
Así, por el teorema del residuo,

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{ts}}{s}\, ds = 2\pi i \frac{e^{ts}}{s}\bigg|_{s=0} = 2\pi i \ ,$$

vale decir

$$h(t) = 1 \ , \qquad t > 0 \ .$$

ii) Sea $t < 0$. En este caso es fácil convencerse, a partir de lo visto en el caso anterior, que el camino de integración conveniente es:



Y en tal caso,

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{ts}}{s}\,ds = \int_\Gamma \frac{e^{ts}}{s}\,ds = 0 \ , fig9-3.fig$$

pues no hay polos dentro del circuito de integración Γ. Entonces

$$h(t) = 0 \ , \qquad t < 0 \ .$$

iii) Caso $t = 0$.

La integral queda simplemente

$$\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} \frac{ds}{s} = \ln(\sigma + ir)\Big|_{r=-R}^{r=R} = \ln(\sqrt{\sigma^2+r^2}\,) + i\arctan\left(\frac{r}{\sigma}\right)\Big|_{r=-R}^{r=R} \xrightarrow[R\to\infty]{} i\pi \ ,$$

de modo que

$$h(0) = \frac{1}{2} \ .$$

Por lo tanto, al invertir la transformada de Laplace hemos reobtenido la función escalón de Heaviside $h(t)$.

9.3 Propiedades de la transformada de Laplace

En lo sucesivo, el símbolo $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ significará "tiene como transformada de Laplace". Además, $f(t)$ y $g(t)$ serán funciones de crecimiento exponencial, con $f(t) = g(t) = 0$ si $t < 0$. Finalmente, definimos $F(s) = \mathcal{L}\{f, s\}$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g, s\}$.

1) Si a, $b \in \mathbb{C}$, entonces

$$af(t) + bg(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, aF(s) + bG(s) \ .$$

(La transformada de Laplace es lineal.)

2) Si $\alpha > 0$, entonces

$$f(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \ .$$

3)

$$\int_0^t f(t')\, dt' \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s} F(s) \ , \qquad \operatorname{Re}(s) > s_0 \ .$$

Demostración

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\, du, s\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(u)\, du\, dt \ .$$

Integrando por partes,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\, du, s\right\} = -\frac{e^{-st}}{s} \left[\int_0^t f(u)\, du\right]\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{s} F(s) \ .$$

4)

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, sF(s) - f(0) \ , \qquad \operatorname{Re}(s) > s_0 \ .$$

Demostración Integrando por partes:

$$\mathcal{L}\{f', s\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = sF(s) - f(0) \ .$$

Análogamente,

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \ .$$

5)

$$t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, (-1)^n F^{(n)}(s) \ .$$

6) Desplazamiento en el eje t. Sea $\beta > 0$. Entonces

$$f(t-\beta) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; e^{-\beta s}F(s) \ .$$

7) Desplazamiento en el plano s. Sea $c \in \mathbb{C}$. Entonces

$$e^{ct}f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F(s-c) \ .$$

Demostración

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t), s\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)\,dt = F(s-c) \ .$$

8) Convolución. De la definición de producto de convolución, y puesto que $f(t)$ y $g(t)$ son nulas si sus argumentos son menores que cero, se sigue que

$$p(t) = f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du \ .$$

Y se puede mostrar que

$$f * g(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F(s)G(s) \ .$$

Demostración Ejercicio.

9.4 Lista de transformadas de Laplace

Se supone en lo que sigue que todas las funciones que aparecen a la izquierda del símbolo $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ son tales que $f(t) = 0$ si $t < 0$.

a)

$$0 \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; 0$$

$$1 \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s}$$

$$c \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{c}{s}$$

b) Sea $\alpha > 0$.

$$\mathcal{L}\{t^\alpha, s\} = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha \, dt = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha \, du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \,, \qquad s > 0 \,.$$

Luego

$$\begin{aligned} t^\alpha &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1) \,, \qquad s > 0 \,. \\ t^n &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \,, \qquad n = 0,\, 1,\, 2 \ldots \\ \sqrt{t} &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}} \,. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} e^{ct} &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-c} \,, \qquad c \in \mathbb{C} \,. \\ t^n e^{ct} &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{(s-c)^{n+1}} \,. \end{aligned}$$

En efecto,

$$\mathcal{L}\{e^{ct}, s\} = \mathcal{L}\{e^{ct} \cdot 1, s\} = \mathcal{L}\{1, s-c\} = \frac{1}{s-c} \,,$$

y

$$\mathcal{L}\{t^n e^{ct}, s\} = (-1)^n \left[\mathcal{L}\{e^{ct}, s\}\right]^{(n)} = \frac{n!}{(s-c)^{n+1}} \,.$$

d) Si $s > 0$, $\omega > 0$,

$$\begin{aligned} \cos \omega t &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2} \\ \operatorname{sen} \omega t &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\ \frac{1}{2}(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s+\alpha}\right) \\ \cosh(\alpha t) &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2-\alpha^2} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \\ \operatorname{senh}(\alpha t) &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} e^{-\gamma t} \cos(\omega t) &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\gamma + s}{(s+\gamma)^2 + \omega^2} \\ e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega t) &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{(s+\gamma)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

f)

$$te^{-\gamma t}\cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{(\gamma+s)^2-\omega^2}{\left[(s+\gamma)^2+\omega^2\right]^2}$$
$$te^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2\omega(\gamma+s)}{\left[(s+\gamma)^2+\omega^2\right]^2}$$

g) Si se desea encontrar la antitransformada de una función racional $P(s)/Q(s)$, con el grado de P menor que el grado de Q, la estrategia será descomponerla en fracciones parciales, de la forma

$$\sum \frac{A_n}{(s-c)^n}\ .$$

Por ejemplo, de este modo podemos mostrar que

$$\frac{as^2+bs+c\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{a-c}{2}t\cos(\omega t) + \frac{a+bt+c}{2\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t\ .$$

h) Sea $q(t)$ la función escalón desplazada en t_0 hacia la derecha:

$$q(t) = h(t-t_0) = \frac{1}{2}[1+\mathrm{sgn}(t-t_0)]\ , \qquad t_0 > 0\ .$$

Entonces, de las propiedades de la transformada de Laplace,

$$q(t) = h(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-t_0 s}\frac{1}{s}\ .$$

Entonces

$$\overline{q(t)}\,' = \delta(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet s\mathcal{L}\{\overline{q(t)}, s\} - \overline{q(0)} = se^{-t_0 s}\frac{1}{s} - 0 = e^{-t_0 s}\ .$$

Suponiendo entonces que es lícito evaluar la transformada de Laplace de distribuciones, tenemos que

$$\delta(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-t_0 s}$$
$$\delta'(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet se^{-t_0 s}$$
$$\delta^{(n)}(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet s^n e^{-t_0 s}$$