Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Método de la Física Matemática II

Problemas
12 de Agosto 1998

Profesor: José Rogan
Ayudante: Julio Yáñez

1. Considere las funciones

$$\varphi_\nu(x) = x^\nu \qquad\qquad x \,\epsilon\, [-1, +1] \ y \ \nu \,\epsilon\, \mathbb{N}$$

   Someta estas funciones al proceso de ortonormalización descrito en clases. Compare los cuatro primeros polinomios así ortonormalizados con los polinomios de Legendre.

2. Demuestre que el conjunto de funciones

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\cos(nkx), \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\text{sen}(nkx) \right\} \qquad\qquad n \ \in \ \mathbb{N}, \ x \ \in \ [x_o, x_o + \lambda] \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

   es un conjunto ortonormal.

3. Expanda en serie de Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \alpha < \pi \\ \frac{1}{2} & x = \pm\alpha \\ 0 & \alpha < |x| < \pi \end{cases}$$

   Estudie el límite $\alpha \ll \pi$ y el número de términos necesarios para que la serie converja.

4. (a) Obtener los desarrollos de Fourier de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \qquad x \in [0, 2\pi] \\ f(x) &= x^2, \qquad x \in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

   (b) A partir de los desarrollos anteriores obtener

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

5. Si

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_{\mathrm{B}}T} - 1},$$

demuestre que

$$U(T) \equiv \int_0^\infty u(\nu, T)\, d\nu = \frac{8\pi^5 k_{\mathrm{B}}^4}{15 h^3 c^3}\, T^4 \equiv \sigma T^4.$$

Evalúe σ si

$$\begin{aligned} k &= 1.38 \times 10^{-16}\ [\mathrm{erg/K}] \\ h &= 6.63 \times 10^{-27}\ [\mathrm{erg\ s}] \\ c &= 3.00 \times 10^{+10}\ [\mathrm{cm/s}] \end{aligned}$$

6. (a) Determinar la evolución temporal de una cuerda con extremos fijos en $x = 0$ y $x = \ell$, si inicialmente sus perfiles de deformación y velocidad son:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \dfrac{\ell}{2} \\ -\dfrac{2h}{\ell}x + 2h & \dfrac{\ell}{2} \le x \le \ell \end{cases} \qquad \text{(Perfil de deformación)}$$

$$g(x) = -x(x - \ell) \qquad x \in [0, \ell] \qquad \text{(Perfil de velocidades)}$$

(b) Repetir el cálculo anterior para los perfiles

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}}\, \mathrm{sen}\, \frac{4\pi}{\ell}\, x \\ g(x) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}}\, \mathrm{sen}\, \frac{3\pi}{\ell}\, x \end{aligned}$$

7. Encuentre el potencial eléctrico en el interior de un círculo unitario si

$$V(\theta) = \begin{cases} 1 & |\theta| < \alpha \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \qquad \rho = 1$$

8. Considere ahora un paralelepípedo de lados L_x, L_y y L_z. Resuelva la ecuación de ondas en tres dimensiones

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Use como condición de borde el hecho que la función U se anula en la frontera del sistema. Encontrar los modos normales de oscilación y muestre que forman un conjunto ortonormal. De expansiones explícitas para las condiciones iniciales arbitrarias:

$$\begin{aligned} U(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(\vec{x}, 0) &= g(\vec{x}) \end{aligned}$$

9. Demuestre que la transformada seno de Fourier y coseno de Fourier de $x^{-\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$ están respectivamente dadas por:

$$\mathcal{F}_S\{x^{-\alpha}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega^{\alpha-1}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(1-\alpha)$$
$$\mathcal{F}_C\{x^{-\alpha}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega^{\alpha-1}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(1-\alpha)$$

donde Γ es la función gama definida por:

$$\Gamma(1-\alpha) \equiv \int_0^\infty e^{-y}y^{-\alpha}\,dy$$

10. Represente las siguientes funciones por sus series de Fourier en la forma real:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) + b_n\mathrm{sen}(nt)$$

(a)

$$f(t) = t^2 \qquad -\pi < t \leq \pi$$

(b)

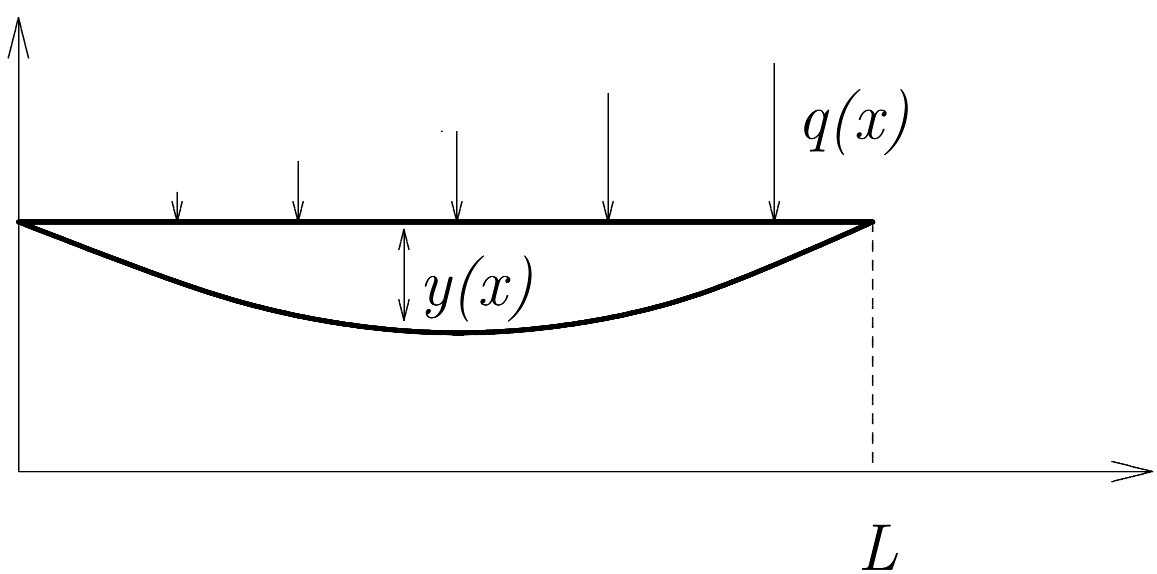
$$g(t) = \begin{cases} +1 & 0 < t < \pi \\ -1 & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

(c)

$$f(t) = e^t \qquad -\pi < t < \pi$$

Establezca las series numéricas particulares que resultan en cada caso mediante la sustitución $t = 0$ y $t = \pi$

11. Considere una barra apoyada en los dos extremos, la barra está cargada con una carga función de la posición $q(x) = ax/L$ (por unidad de longitud). Ver figura.



Se desea encontrar la defleción $y(x)$ de la barra. La función $y(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^4y(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{R}$$

donde R es la rigidez de la barra.

(a) Muestre que la deflexión de la barra viene dada por

$$y(x) = \frac{2aL^4}{R\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(b) Encuentre también la solución en forma cerrada (integrando directamente la ecuación diferencial).

12. Muestre que la transformada de Fourier de una función radialmente simétrica se puede reescribir como una transformada seno de Fourier

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} f(r) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3r = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} r f(r)\ \mathrm{sen}(kr)\, dr$$

Calcule

$$\left| \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\alpha r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3r \right|^2$$

13. Sea $U(x,t)$ una función definida en el intervalo $[0, L]$. Demostrar que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_S\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\mathcal{F}_S(U) - \frac{n\pi}{L}\left[U(0,t) + (-1)^{n+1}U(L,t)\right] \\
\mathcal{F}_C\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\mathcal{F}_C(U) - \left[\frac{\partial U}{\partial x}(0,t) + (-1)^{n+1}\frac{\partial U}{\partial x}(L,t)\right]
\end{aligned}$$

Para ello evalúe antes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_S\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= -\frac{n\pi}{L}\mathcal{F}_C(U) \\
\mathcal{F}_C\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \frac{n\pi}{L}\mathcal{F}_S(U) - \left[U(0,t) + (-1)^{n+1}U(L,t)\right]
\end{aligned}$$

14. Demuestre que las transformadas inversas finitas seno y coseno están dadas por:

$$\begin{aligned}
F(x) = \mathcal{F}_S^{-1}\left(f_s(n)\right) &= \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
F(x) = \mathcal{F}_C^{-1}\left(f_c(n)\right) &= \frac{1}{L}f_c(0) + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\ \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)
\end{aligned}$$

donde:

$$f_s(n) = \int_0^L F(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$$
$$f_c(n) = \int_0^L F(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$$

15. Calcule las transformadas finitas seno y coseno de la función

$$F(x) = 2x\;\Theta(L-x)\Theta(x)$$

donde Θ es la función escalón de Heaviside.

16. (a) Un pulso rectangular está descrito por

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Encuentre la transformada de Fourier de tal pulso.

(b) Use el resultado anterior para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen^2 t}{t^2}\,dt.$$

17. Con $F(k)$ y $G(k)$ las transfomadas de Fourier de $f(x)$ y de $g(x)$, respectivamente. Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k) - G(k)|^2\,dk.$$

18. Use la relación de Parseval, para evaluar

(a)
$$\int_0^{\infty} \frac{dw}{(w^2+a^2)^2}$$

(b)
$$\int_0^{\infty} \frac{w^2 dw}{(w^2+a^2)^2}$$

19. Demuestre las siguientes relaciones para:

(a) Las transformadas de Fourier seno

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)\,dt = -\int_0^{\infty} F_S(k)G_S(k)\cos(kx)\,dk$$

donde f, g son funciones impares y F_S, G_S son sus respectivas transformadas de Fourier seno.

(b) Las transformadas de Fourier coseno

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)\ dt = -\int_{0}^{\infty} F_C(k)G_C(k)\cos(kx)\ dk$$

donde f, g son funciones pares y F_C, G_C son sus respectivas transformadas de Fourier coseno.

20. Demuestre que para las transformadas de Fourier seno y coseno la relación de Parseval adopta la forma

$$\int_{0}^{\infty} F(k)G(k)\ dk = \int_{0}^{\infty} f(x)g(x)\ dx$$

21. Considere la función

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t \leq 1\ , \\ 0, & \text{si } t < 0\ , \\ 0, & \text{si } t > 1\ , \end{cases}$$

calcule el producto de convolución $f * f$.

22. Sea $\delta^{'}(x)$ la función generalizada "derivada de la delta", es decir, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{'}(x)f(x)\ dx = -f^{'}(0)$$

Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{'}(x^2-a^2)\,|\,x\,|\ dx \quad \text{con } a \neq 0$$

23. Sea $\delta(\vec{\rho})$ la función generalizada "delta" en dos dimensiones. Muestre que se satisface

$$\delta(\vec{\rho}) = -\frac{1}{2\pi}\nabla^2\,\overline{\log\left(\frac{1}{\rho}\right)}$$

24. Demostrar que la delta de Dirac $\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \delta(x_1-x_1')\delta(x_2-x_2')\delta(x_3-x_3')$ al escribirla en términos de las coordenadas ξ_1, ξ_2, ξ_3 transforma de acuerdo a:

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{\left|\ \mathrm{J}(\vec{x},\vec{\xi})\ \right|}\ \delta(\xi_1-\xi_1')\delta(\xi_2-\xi_2')\delta(\xi_3-\xi_3')\ ,$$

donde $\mathrm{J}(\vec{x},\vec{\xi})$ es el Jacobiano de la transformación de coordenadas.

25. Usando las funciones generalizadas delta de Dirac en las coordenadas apropiadas expresar la siguientes distribuciones de carga en términos de la densidad de carga tridimensional $\rho(\vec{x})$.

(a) En coordenadas esféricas, una carga Q distribuida uniformemente sobre una esfera de radio a.

(b) En coordenadas cilíndricas, una densidad lineal de carga λ distribuida uniformemente sobre una superficie cilíndrica de radio b.

(c) En coordenadas cilíndricas, una carga Q distribuida uniformemente sobre un disco circular de radio R.

(d) Lo mismo que c) pero en coordenadas esféricas.

26. De las siguientes funciones determine cuales son de orden exponencial:

(a) t^n,

(b) t^t,

(c) $\operatorname{sen}(t^2)$,

(d) $\tanh(t)$.

Además, si suponemos $f(x)$ de orden exponencial determine si

(e) $\int_0^x f(t)dt$,

(f) $f'(t)$,

son de orden exponencial.

27. ¿Es la función $f(x) = \dfrac{1}{x}e^{2x}$ de orden exponenecial? ¿Tiene transformada de Laplace?

28. Muestre que $\delta(s) = \dfrac{1}{\pi} \lim_{s\to 0} \mathcal{L}\left\{\cos(xt), s\right\}$

29. Calcule $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos at - \cos bt}{b^2 - a^2}\right\}$

30. Usando expansiones en fracciones parciales calcule

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}$

31. Calcule $\mathcal{L}\{\operatorname{sech}(x)\}(t)$

32. Encuentre la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

(a) $te^{2t}f'(t)$, donde f es una función arbitraria, que tiene transformada de Laplace.

(b) $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1/2 \\ 1+t & t \geq 1/2 \end{cases}$

(c) $|\operatorname{sen}(t)|$

(d) $\cosh(at)\cos(at)$

(e) $\operatorname{senh}(at)\cos(at)$

(f) $\dfrac{1}{2a}t\,\operatorname{sen}(at)$

33. Encuentre las antitransformadas de Laplace de las siguientes funciones:

(a) $\dfrac{1}{s(s+2)^2}$

(b) $\dfrac{s^2}{(s-1)^2}$

(c) $\dfrac{as^2+2a^3}{s^4+4a^4}$

(d) $\dfrac{2a^2s}{s^4+4a^4}$

(e) $\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$

(f) $\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$

34. Use cada uno de los tres métodos:

- Expansión en fracciones parciales,
- Teorema de convolución,
- Integral de Fourier-Mellin,

para calcular

(a)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}\right\}$$

(b)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right\}$$

35. Evalúe la integral de Fourier-Mellin para:

$$f(s)=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$$

36. El movimiento de un cuerpo cayendo en un medio resistivo está descrito por

$$m\ddot{x}(t)=mg-b\dot{x}(t)$$

donde m es la masa, g la aceleración de gravedad y b una constante que depende del medio y del geometría del objeto que cae. Encuentre, usando el método de transformadas de Laplace, $x(t)$ dada las condiciones iniciales $x(0)=\dot{x}(0)=0$.

37. Muestre que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{2s+1} e^{-ax^2}\, dx &= \frac{\Gamma(s+1)}{2a^{s+1}} \\ \int_0^\infty x^{2s} e^{-ax^2}\, dx &= \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{2a^{s+\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

38. Considere un oscilador forzado y no amortiguado con una fuerza externa $F_0 \operatorname{sen} \omega t$. Encuentre la solución, $X(t)$, con las siguientes condiciones iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 0$.

39. Sea q una carga puntual restringida a moverse en el plano xy bajo la acción de un campo magnético $\vec{B} = B_0 \hat{k}$. Dado que la Ley de Fuerzas de Lorentz es $\vec{f} = q/c\ (\vec{v} \times \vec{B})$. Determinar $\vec{r}(t)$ para las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\vec{v}(0) &= v_0 \hat{\imath}\ , \\ x(0) &= x_0\ , \\ y(0) &= y_o + \operatorname{sgn}(q) r\ .\end{aligned}$$

Donde r es una constante a determinar.

40. Determinar el período de oscilación, en función de la energía, del movimiento de una partícula, de masa m en un campo unidimensional $U(x) = A\,|\,x\,|^n$, donde A es una constante. Comparar con el caso $n = 2$.

41. Muestre que

$$\mathcal{L}\{E_1(t)\} = \frac{1}{s}\ln(s+1)$$

donde $\mathcal{L}$ es la transformada de Laplace de la función

$$E_1(t) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{x} dx$$

42. Resuelva, usando transformada de Laplace, las siguientes ecuaciones diferenciales

    (a) $y'' + y = t^2 + 1$, con las condiciones iniciales $y(\pi) = \pi^2$, $y'(\pi) = 2\pi$.

    (b) $y'' - 4y = 1 + \delta(t-1)$, con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

    Verifique sus resultados.

43. Resuelva, usando transformada de Laplace, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y'' + 3y + 2z' &= 0 \qquad y(0) = 1\ y'(0) = 0 \\ z'' + 3z - 2y' &= 0 \qquad z(0) = 0\ z'(0) = 0 \end{aligned}$$

44. Demuestre que la función gamma, $\Gamma(z)$, puede ser escrita de las dos formas siguientes

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt \qquad \Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt$$

45. Evalúe (usando la función gamma)

$$\begin{aligned} -\int_0^1 x^k \ln x dx &= \frac{1}{(k+1)^2} \quad k > -1 \\ \int_0^\infty e^{-x^4} dx &= \left(\frac{1}{4}\right)! \end{aligned}$$

46. En una distribución Maxweliana la fracción de partículas entre la rapidez v y $v + dv$ es

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT) v^2 \, dv$$

siendo N el número total de partículas. El promedio o valor esperado de $\langle v^n \rangle = N^{-1} \int v^n dN$. Muestre que

$$\langle v^n \rangle = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2} \left(\frac{n+1}{2}\right)! \Big/ \frac{1}{2}!$$

47. Evalúe (usando la función beta)

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n \theta \, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}[(n-1)/2]!}{2(n/2)!}$$

48. Demuestre que

$$\begin{aligned} H'_{2m}(0) &= 0 \\ H'_{2m+1}(0) &= 2(-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} \end{aligned}$$

donde H_n son los polinomios de Hermite de grado n.

49. Para la siguiente ecuación diferencial:

$$z(z-1)\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + (3z-1)\frac{d\psi(z)}{dz} + \psi(z) = 0$$

   (a) Analice sus puntos singulares.
   (b) Resuelvala, utilizando series.

50. Considere la ecuación de Hermite:

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0 \; .$$

   (a) Mostrar que las soluciones serán funciones pares o impares.
   (b) Resuelva por expansión en serie de potencias, explicitar la ecuación indicial y las relaciones de recurrencia.
   (c) Mostrar que las soluciones son convergentes para todo x.

(d) Mostrar que el cuociente entre sucesivos coeficientes tiene un comportamiento asintótico identico al cuociente entre coeficientes sucesivos de la expansión de la función $exp(2x^2)$.

(e) Determinar los valores apropiados del coeficiente α que permiten cortar la serie para obtener soluciones polinomiales.

51. Considere la ecuación de Legendre:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell+1)y = 0 \ .$$

(a) Mostrar que las soluciones serán funciones pares o impares.

(b) Resuelva por expansión en serie de potencias, explicitar la ecuación indicial y las relaciones de recurrencia.

(c) Mostrar que las series pares e impares divergen en $x = \pm 1$.

(d) Determinar los valores apropiados del coeficiente ℓ que permiten cortar la serie para obtener soluciones polinomiales.

52. (a) Para a, b no enteros y c un entero, muestre que:

$$_2F_1(a,b,c;x) \quad \text{y} \quad _2F_1(a+1-c, b+1-c, 2-c; x)$$

producen una sóla solución a la ecuación hipergeométrica.

(b) ¿Qué ocurre si a es un entero? por ejemplo $a = -1$ y $c = -2$.

53. Demostrar

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a,c;z) &= \frac{1}{B(a,c-a)} \int_0^1 (1-t)^{c-a-1} t^{a-1} e^{tz}\, dt \\ {}_1F_1(a,c;z) &= e^z \; {}_1F_1(c-a,c;-z) \end{aligned}$$

donde $B(a,b)$ es la funcióin Beta.

54. Muestre que el potencial electroestático $\varphi(\vec{r})$ producido por una carga q en $z = a$ es para $r < a$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

55. (a) En la expansión en serie

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{\nu m} J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right) \qquad 0 \le \rho < a, \quad \nu > -1 \ ,$$

con $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$. Encuentre los coeficientes $C_{\nu m}$ de la expansión.

(b) En la expansión en serie

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} D_{\nu m} J_\nu \left(\beta_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right) \qquad 0 \le \rho < a, \quad \nu > -1 \ ,$$

con $J'_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)|_{\rho=a} = 0$. Encuentre los coeficientes $D_{\nu m}$ de la expansión.