Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Métodos de la Física Matemática II

Prueba 1
Solución

Profesor: José Rogan
Ayudante: Julio Yáñez.

1. Considere la ecuación de Laplace bidimensional en coordenadas polares,

$$\frac{\partial^2\psi(r,\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(r,\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi(r,\theta)}{\partial\theta^2}=0.$$

Encuentre el potencial electroestático $\psi(r,\theta)$ en el interior de un círculo de radio R, tal que sobre el círculo se satisface $\psi(r=R,\theta)=\delta(\theta)$. Encuentre, también, la solución exterior.

Solución

Planteamos la separación de variables

$$\psi(r,\theta)=R(r)T(\theta)\ ,$$

reemplazamos en la ecuación (1) obteniendo

$$TR''+\frac{1}{r}TR'+\frac{1}{r^2}T''R=0\ .$$

Multiplicando por r^2/TR tenemos

$$\frac{r^2R''}{R}+\frac{rR'}{R}+\frac{T''}{T}=0\ . \tag{1}$$

En (1) los dos primeros términos de la izquierda sólo dependen de r y el término de la derecha sólo de θ luego cada uno corresponde a una constante, es decir, para la parte radial

$$\frac{r^2}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right)=-m^2\ ,$$

con m constante. Reordenamos la ecuación como

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{m^2R}{r^2}=0\ .$$

Una ecuación de Euler, planteamos como solución $R(r)=r^\sigma$ y lo reemplazamos

$$\sigma(\sigma-1)r^{\sigma-2}+\sigma r^{\sigma-1-1}-m^2r^{\sigma-2}=0\ ,$$

dividiendo por $r^{\sigma-2}$ tenemos

$$\sigma(\sigma-1)+\sigma-m^2=0\ ,\quad \text{luego}\quad \sigma^2=m^2\ ,\qquad \text{o bien}\quad \sigma=\pm m\ .$$

Por lo tanto, la solución más general para al ecuación (1) es

$$R(r)=Ar^m+Br^{-m}\ , \tag{2}$$

con A y B constantes. Por otro lado, la ecuación para la parte angular

$$\frac{d^2T}{d\theta^2}+m^2T=0\ ,$$

con solución

$$T(\theta)=Ce^{im\theta}+De^{-im\theta}\ , \tag{3}$$

con C y D constantes. Imponemos que la función sea periódica en 2π en la parte angular, es decir, tenemos que $T(\theta+2\pi)=T(\theta)$ eso determina los posible valores que puede adoptar m en nuestro caso debe ser un entero.

La solución más general dentro del círculo es:

$$\Psi(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}r^m\left(A_me^{im\theta}+B_me^{-im\theta}\right)\ .$$

Considerando la condición de borde, $\psi(r=R,\theta)=\delta(\theta)$ elegimos soluciones reales y de paridad par, es decir tomamos $A_m=B_m=a_m/2$ y $A_0+B_0=a_0/2$, quedandonos

$$\Psi(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}r^ma_m\cos m\theta\ ,$$

y debe satisfacer la condición de borde

$$\Psi(r=R,\theta)=\delta(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}R^ma_m\cos m\theta\ .$$

A partir de los coeficientes de Fourier tenemos

$$a_0=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\theta)\,d\theta=\frac{1}{\pi}\ ,$$

y

$$R^ma_m=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\theta)\cos(m\theta)\,d\theta=\frac{1}{\pi}\ .$$

Por lo tanto la solución interior es

$$\Psi(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m}{R^m}\cos m\theta\ .$$

La solución real y con paridad par más general fuera del círculo es:

$$\Psi(r,\theta) = \frac{b_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^{-m} b_m \cos m\theta \ ,$$

y debe satisfacer la condición de borde

$$\Psi(r=R,\theta) = \delta(\theta) = \frac{b_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} R^{-m} b_m \cos m\theta \ .$$

Los coeficientes de Fourier

$$b_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \ ,$$

y

$$R^{-m} b_m = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta)\cos(m\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \ .$$

Por lo tanto la solución exterior es

$$\Psi(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^m}{r^m} \cos m\theta \ .$$

2. Considere la ecuación de conducción del calor

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad , t > 0 \ .$$

Demostrar que, considerando la condición inicial $u(x,0) = f(x)$ y que $u(x,t)$ es acotada para todo t y x, la solución más general está dada por el producto de convolución

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/4t}\, dy \ .$$

Solución

Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación (2)

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = 0 \ .$$

Usamos el hecho de que

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, k \right\} = (-ik)^2 \mathcal{F}\{u, k\} \ .$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\{u,k\} - (ik)^2\mathcal{F}\{u,k\} = 0 \ .$$

Llamamos $\mathcal{F}\{u,k\} = U(k,t)$,

$$\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} - (ik)^2 U(k,t) = 0 \ . \tag{4}$$

Ahora evaluamos en $t = 0$

$$\begin{aligned} U(k,0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{ikx}\,dx \ , \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\,dx \ , \\ &= F(k) \ . \end{aligned}$$

Donde $F(k)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$. Luego la solución de (4) es

$$U(k,t) = F(k)e^{-k^2 t} \ . \tag{5}$$

Ahora, calculamos la antitransformada de Fourier de $e^{k^2 t}$, definiendo

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{k^2 t}e^{-ikx}\,dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k^2 t + ikx)}\,dk \end{aligned} \tag{6}$$

Observemos que

$$k^2 t + ikx = \left[k\sqrt{t} + \frac{ix}{2\sqrt{t}}\right]^2 - \left(\frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2 = \left[k\sqrt{t} + \frac{ix}{2\sqrt{t}}\right]^2 + \frac{x^2}{4t} \ .$$

Volviendo a (6) se tiene

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(k\sqrt{t} + \frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2 + \frac{x^2}{4t}}\,dk \ , \\ &= \frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k^2 t + ikx)}\,dk \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Haciendo el cambio de variable $r = k\sqrt{t} + ix/2$, tal que $dr = \sqrt{t}\,dk$, luego

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2}\,\frac{dr}{\sqrt{t}} \ , \\ &= \frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}\sqrt{\pi} \ , \\ &= \frac{e^{\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2t}} \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Usamos el teorema sobre la transformada de Fourier del producto de convolución,

$$\mathcal{F}\{f * g, k\} = \sqrt{2\pi} F(k) G(k) \ .$$

Luego, observamos en la ecuación (5) y llamamos $G(k) = e^{-k^2 t}$ y se tiene

$$\mathcal{F}\{f * g, k\} = \sqrt{2\pi} U(k,t) \ .$$

Aplicando antitransformada a ambos lados se tiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi} u(x,t) &= f * g \ , \\
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{e^{\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{2t}} \, dy \ , \\
u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{(x-y)^2/4t} \, dy \ .
\end{aligned}$$

3. Pruebe la siguiente identidad

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} \ .$$

Usando la identidad anterior, demuestre la fórmula de suma de Poisson:

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f, k\} \ ,$$

donde $f \in \mathcal{S}$.

Solución

Consideremos la función "dientes de sierra":

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}(t+\pi) & -\pi \leq t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ -\frac{1}{2\pi}(t-\pi) & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

La función es periódica:

$$f(t + 2m\pi) = f(t) \quad \forall \, m \in \mathbb{Z} \ .$$

Es pues expandible en una serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}} \ ,$$

con

$$c_\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') e^{-i\nu t'}\, dt' = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\nu} \ , \quad \nu \neq 0 \ .$$

Luego

$$f(t) = \frac{-i}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{i\nu t}}{\nu} \ ,$$

donde la prima indica que el término con $\nu = 0$ esta excluído. Consideremos la distribución asociada

$$\overline{f(t)} = \overline{\frac{-i}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{i\nu t}}{\nu}} \ .$$

Derivemosla

$$\left(\overline{f(t)}\right)' = \frac{-i}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \overline{i\nu \frac{e^{i\nu t}}{\nu}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \overline{e^{i\nu t}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \overline{e^{i\nu t}} - \overline{\frac{1}{2\pi}} \ .$$

Por otra parte,

$$\left(\overline{f(t)}\right)' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi k) - \overline{\frac{1}{2\pi}} \ .$$

Comparando ambas expresiones

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi k) - \overline{\frac{1}{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \overline{e^{i\nu t}} - \overline{\frac{1}{2\pi}} \ ,$$

finalmente, entendiendola como un igualdad entre distribuciones

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \ .$$

Veamos la acción de ambos lados frente a una función $f \in \mathcal{S}$ arbitraria,

$$\left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi k), f \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \delta(t - 2\pi k), f \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k) \ ,$$

el lado derecho

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt}, f \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle e^{ikt}, f \right\rangle \ , \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} f(t)\, dt \ , \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f, k\} \ . \end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones llegamos a la fórmula de suma de Poisson

$$\sqrt{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left\{f,k\right\} \ .$$

4. Determinar el período de oscilación, en función de la energía total E, del movimiento de una partícula, de masa m en un campo unidimensional $U(x) = A\,|\,x\,|^n$, donde A es una constante. Exprese su resultado en un cuociente de funciones Gamma.

Solución

La energía total del sistema

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + A\,|\,x\,|^n \ ,$$

despejando la velocidad

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - A\,|\,x\,|^n} \ . \tag{9}$$

El período es

$$\tau = 2\int_{-x_M}^{x_M}\frac{dx}{\dot{x}} = 4\int_0^{x_M}\frac{dx}{\dot{x}} \ ,$$

donde $Ax_M^n = E$. Además, hemos hecho uso de la paridad de la función $\dot{x}$, reemplazando en (9) tenemos

$$\tau = 4\sqrt{\frac{2}{m}}\int_0^{x_M}\frac{dx}{\sqrt{E - Ax^n}} = \frac{2\sqrt{2m}}{\sqrt{E}}\int_0^{x_M}\frac{dx}{\sqrt{1 - Ax^n/E}} \ ,$$

hacemos el cambio de variable $u = Ax^n/E$ invirtiendo la relación $x = (Eu/A)^{1/n}$ y diferenciando $dx = 1/n(E/A)^{1/n}u^{1/n-1}du$ reemplazandolo en la integral

$$\tau = \frac{2\sqrt{2m}}{\sqrt{E}}\int_0^1 \frac{1}{n}\left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{1}{n}} u^{\frac{1}{n}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}\,du \ .$$

Usando la definición de la función beta

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \ ,$$

tenemos

$$\tau = \frac{2\sqrt{2m}}{n\sqrt{E}}\left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{1}{n}} B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2m\pi}}{n\sqrt{E}}\left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} \ .$$

5. Considere un oscilador armónico de frecuencia angular ω sometido a una fuerza externa

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0, T[\ , \\ 0, & \text{si } t \notin [0, T[\ . \end{cases}$$

Encuentre la solución para todo $t > 0$ con la condición inicial de partir del reposo en la posición de equilibrio.

Solución

Escribamos la ecuación para un oscilador armónico en la cual usamos para la fuerza externa $h(t)$ una distribución

$$\psi''(t) + \omega^2 \psi(t) = 1 - \Theta(t - T) \ , \quad \text{para } t > 0, \tag{10}$$

en donde la función Θ corresponde a la función escalón de Heaviside. Las condiciones iniciales son $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. Apliquemos la tansformada de Laplace a (10).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\psi'', s\right\} + \omega^2 \mathcal{L}\left\{\psi, s\right\} &= \mathcal{L}\left\{1, s\right\} - \mathcal{L}\left\{\Theta(t - T), s\right\} \ , \\ s^2 \Psi(s) - s\phi(0) - \phi'(0) + \omega^2 \Psi(s) &= \frac{1}{s} - \mathcal{L}\left\{\Theta(t - T), s\right\} \ . \end{aligned}$$

La transformada de Heaviside

$$\Theta(t - T) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \ \frac{e^{-Ts}}{s} \ .$$

Ocupando las condiciones iniciales, denotando por $\Psi(s) = \mathcal{L}\{\psi, s\}$ y despejando

$$\begin{aligned} s^2 \Psi(s) + \omega^2 \Psi(s) &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \ , \\ (s^2 + \omega^2) \Psi(s) &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \ , \\ \Psi(s) &= \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)} - \frac{e^{-Ts}}{s(s^2 + \omega^2)} \ . \end{aligned}$$

Retransformando

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \ \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)} = F(s) = \frac{1}{s} G(s) \ ,$$

donde

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + \omega^2)} \ \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \ \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\omega} = g(t) \ ,$$

y

$$f(t) = \int_0^t g(t') dt' \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \ \frac{1}{s} G(s) = F(s) \ ,$$

luego

$$f(t)=\int_0^t \frac{\operatorname{sen}\omega t'}{\omega}dt' = -\frac{1}{\omega^2}\cos\omega t'\bigg|_0^t = \frac{1}{\omega^2}-\frac{\cos\omega t}{\omega^2}\ .$$

Usando la propiedad

$$f(t-\beta) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ e^{-\beta s}F(s)\ ,$$

con $\beta = T$,

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\ ,$$

y

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\omega^2}-\dfrac{\cos\omega t}{\omega^2} & \text{si } t\geq 0\ , \\ 0, & \text{si } t<0\ . \end{cases}$$

La función desplazada

$$f(t-T)=\begin{cases} \dfrac{1}{\omega^2}-\dfrac{\cos\omega(t-T)}{\omega^2} & \text{si } t\geq T\ , \\ 0, & \text{si } t<T\ . \end{cases} \tag{11}$$

Resumiendo ambos resultados (5) y (11) tenemos la solución

$$\psi(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\omega^2}[1-\cos\omega t] & \text{si } t<T\ , \\ \dfrac{1}{\omega^2}[\cos\omega(t-T)-\cos\omega t] & \text{si } t\geq T\ . \end{cases} \tag{12}$$

6. Determine la trayectoria de una partícula de masa m y carga e, la cual se mueve en un campo electromagnético de la forma

$$\vec{E}=E_o\hat{\imath} \quad \text{y} \quad \vec{B}=B_o\hat{k}$$

sometida además a la acción del campo gravitacional de la Tierra, $\vec{g}=-g\hat{k}$. Es decir, resuelva

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=e\vec{E}+\frac{e}{c}\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{B}+m\vec{g}$$

con las condiciones iniciales

$$\vec{r}(t=0)=z_o\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t=0)=v_{ox}\hat{\imath}+v_{oy}\hat{\jmath}+v_{oz}\hat{k}\ .$$

Use el formalismo de la transformada de Laplace para resolver el problema. Le puede ser útil, para compactar sus resultados, definir la frecuencia ciclotrónica $\omega_c = eB_o/mc$.

Solución

Escribiendo la ecuación (6) por componentes, y usando la forma explícitas de los campos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{e}{m}E_0 + \omega_c \frac{dy(t)}{dt} \ , \\
\frac{d^2y(t)}{dt^2} &= -\omega_c \frac{dx(t)}{dt} \ , \\
\frac{d^2y(t)}{dt^2} &= -g \ .
\end{aligned}$$

Tomando la transformada de Laplace en ambos lados para las tres ecuaciones

$$\begin{aligned}
s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) &= \frac{eE_0}{ms} + \omega_c sY(s) - \omega_c y(0) \ , \\
s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) &= -\omega_c sX(s) - \omega_c x(0) \ , \\
s^2Z(s) - sz(0) - \dot{z}(0) &= -\frac{g}{s} \ .
\end{aligned}$$

En donde $X(s) = \mathcal{L}\{x,t\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y,t\}$, $Z(s) = \mathcal{L}\{z,t\}$. Utilizemos las condiciones iniciales (6) y reordenamos

$$s^2X(s) - \omega_c sY(s) = v_{0x} + \frac{eE_0}{ms} \ , \tag{13}$$

$$s^2Y(s) + \omega_c sX(s) = v_{0y} \ , \tag{14}$$

$$s^2Z(s) = sz_0 + v_{0z} - \frac{g}{s} \ . \tag{15}$$

Resolvamos (15) primero

$$Z(s) = \frac{z_0}{s}\frac{v_{0z}}{s^2} - \frac{g}{s^3} \ ,$$

retranformando

$$\boxed{z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \ .}$$

La ecuación (13) por s y la ecuación (14)por ω_c sumamos y obtenemos

$$s^3X(s) - \omega_c sX(s) = v_{0x}s + \frac{eE_0}{m} + \frac{v_{0y}\omega_c}{s} \ ,$$

despejando

$$X(s) = \frac{v_{0x}}{s^2 + \omega_c^2} + \left(v_{0y}\omega_c + \frac{eE_0}{m}\right)\frac{1}{s}\frac{1}{s^2 + \omega_c^2}$$

retransformando

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c}\operatorname{sen}\omega_c t - \left(v_{0y} + \frac{eE_0}{m\omega_C}\right)\int_0^t \operatorname{sen}\omega_C t' \, dt' \ ,$$

integrando

$$\boxed{x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \operatorname{sen} \omega_c t - \frac{v_{0y}}{\omega_c} \cos \omega_c t - \frac{eE_0}{m\omega_C^2} \cos \omega_c t + \frac{v_{0y}}{\omega_c} + \frac{eE_0}{m\omega_C^2}\ .}$$

La ecuación (13) por $-\omega_C$ y la ecuación (14)por s sumamos y obtenemos

$$s^3 Y(s) + \omega_c^s Y(s) = -v_{0x}\omega_C + \frac{eE_0\omega_C}{ms} + v_{0y}\omega_c s\ ,$$

despejando

$$Y(s) = \frac{v_{0y}}{\omega_C}\frac{\omega_C}{s^2+\omega_c^2} - v_{0x}\frac{1}{s}\frac{\omega_C}{s^2+\omega_c^2} - \frac{eE_0}{m}\frac{1}{s^2}\frac{\omega_C}{s^2+\omega_c^2}$$

retransformando

$$y(t) = \frac{v_{0y}}{\omega_c} \operatorname{sen} \omega_c t - v_{0x}\int_0^t \operatorname{sen} \omega_C t'\, dt' - \frac{eE_0}{m}\int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \operatorname{sen} \omega_C t''\ ,$$

integrando

$$\boxed{y(t) = \frac{v_{0y}}{\omega_c} \operatorname{sen} \omega_c t + \frac{v_{0x}}{\omega_c} \cos \omega_c t - \frac{v_{0x}}{\omega_c} + \frac{eE_0}{m\omega_C^2} \operatorname{sen} \omega_c t - \frac{eE_0 t}{m\omega_C}\ .}$$