Capítulo 1

Espacio de funciones

1.1 Definiciones

Definición 1.1 *Denotemos por $\mathcal{C}_o\,[a,b]$ al conjunto de funciones complejas continuas de una variable real $t \in [a,b]$. Además, escogemos que:*

$$\forall f \in \mathcal{C}_o\,[a,b], \quad f(a) = f(b). \tag{1.1}$$

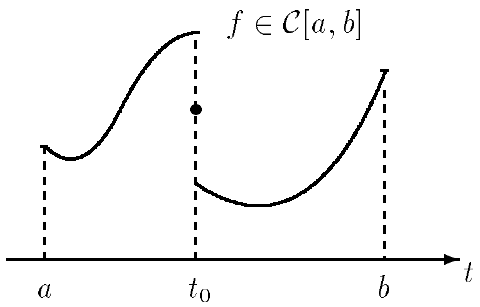
Notemos que claramente se cumple que

$$\text{Si } f, g \in \mathcal{C}_o\,[a,b] \Longrightarrow f + g \in \mathcal{C}_o\,[a,b] \tag{1.2a}$$

y

$$\text{si } f \in \mathcal{C}_o\,[a,b] \text{ y } \lambda \in \mathbb{C} \Longrightarrow \lambda f \in \mathcal{C}_o\,[a,b]\ . \tag{1.2b}$$

Definición 1.2 *Denotemos por $\mathcal{C}\,[a,b]$ al conjunto de funciones complejas seccionalmente continuas, acotadas (o sea, con discontinuidades "mansas" o de primera especie), de una variable real $t \in [a,b]$.*



Si t_0 es un punto de discontinuidad, la función f debe estar dada, en ese punto, por

$$f(t_0) = \frac{1}{2}\left[f(t_0^+) + f(t_0^-)\right]. \tag{1.3}$$

Podemos afirmar que los conjuntos $\mathcal{C}_o\,[a,b]$ y $\mathcal{C}\,[a,b]$ forman espacios vectoriales sobre el cuerpo de los complejos. Además, $\mathcal{C}_o\,[a,b] \subset \mathcal{C}\,[a,b]$.

Definición 1.3 *Consideremos dos funciones $f,\ g\in\mathcal{C}\,[a,b]$. Definimos su* ***producto escalar*** *como*

$$\boxed{(\, f \,|\, g \,) = \int_a^b f^*(t)g(t)\; dt} \tag{1.4}$$

Propiedades del producto escalar. Sean $f,\ g,\ h\in\mathcal{C}\,[a,b]$ y $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$(\, f \,|\, g \,) = (\, g \,|\, f \,)^* \tag{1.5a}$$

$$\begin{aligned}(\, f \,|\, g+h \,) &= (\, f \,|\, g \,) + (\, f \,|\, h \,)\\ (\, f+g \,|\, h \,) &= (\, f \,|\, h \,) + (\, g \,|\, h \,)\end{aligned} \tag{1.5b}$$

$$\begin{aligned}(\, \lambda f \,|\, g \,) &= \lambda^*(\, f \,|\, g \,)\\ (\, f \,|\, \lambda g \,) &= \lambda(\, f \,|\, g \,)\end{aligned} \tag{1.5c}$$

$$\text{Si } f\not\equiv 0 \Longrightarrow (\, f \,|\, f \,) > 0. \tag{1.5d}$$

Definición 1.4 *Un espacio vectorial complejo dotado de un producto escalar con las propiedades anteriores, ecuaciones* (1.5)*, se conoce como* ***espacio de Hermite****.*

Definición 1.5 *Sea $f\in\mathcal{C}\,[a,b]$. Definimos su* ***norma:***

$$\|\, f \,\| = \sqrt{(\, f \,|\, f \,)} \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Propiedades de la norma. Sean $f, g\in\mathcal{C}\,[a,b]$ y $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$\|\, f \,\| \geq 0 \tag{1.7a}$$

$$\|\, \lambda f \,\| = |\lambda|\, \|\, f \,\| \tag{1.7b}$$

$$|(\, f \,|\, g \,)| \leq \|\, f \,\|\cdot\|\, g \,\| \qquad \text{Desigualdad de Cauchy-Schwartz} \tag{1.7c}$$

$$\|\, f\pm g \,\| \leq \|\, f \,\| + \|\, g \,\| \qquad \text{Desigualdad Triangular} \tag{1.7d}$$

$$\text{Si } f(z)\not\equiv 0 \Longrightarrow \|\, f \,\| > 0. \tag{1.7e}$$

Demostración Desigualdad de Cauchy-Schwartz, ecuación (1.7c). Sea $\lambda\in\mathbb{C}$ arbitrario.

$$0 \leq \|\, \lambda f + g \,\|^2 = (\, \lambda f+g \,|\, \lambda f+g \,) = \lambda\lambda^*\,\|\, f \,\|^2 + \lambda^*(\, f \,|\, g \,) + \lambda(\, g \,|\, f \,) + \|\, g \,\|^2 .$$

Siendo λ arbitrario, tomémoslo entonces como:

$$\lambda = -\frac{(\, f \,|\, g \,)}{\|\, f \,\|^2} \qquad\Longrightarrow\qquad \lambda^* = -\frac{(\, g \,|\, f \,)}{\|\, f \,\|^2},$$

luego

$$0 \leq \frac{|(\, f \,|\, g \,)|^2}{\|\, f \,\|^4}\,\|\, f \,\|^2 - 2\frac{|(\, f \,|\, g \,)|^2}{\|\, f \,\|} + \|\, g \,\|^2 = -\frac{|(\, f \,|\, g \,)|^2}{\|\, f \,\|^2} + \|\, g \,\|^2$$

$$|(\, f \,|\, g \,)|^2 \leq \|\, f \,\|^2 \cdot \|\, g \,\|^2$$

$$|(\, f \,|\, g \,)| \leq \|\, f \,\| \cdot \|\, g \,\| \,.$$

q.e.d.

Demostración Desigualdad triangular, ecuación (1.7d). De la definición de norma

$$\begin{aligned}
&\|\, f \pm g \,\|^2 = (\, f \pm g \,|\, f \pm g \,) = (\, f \pm g \,|\, f \,) \pm (\, f \pm g \,|\, g \,) \in \mathbb{R}, \\
&\|\, f \pm g \,\|^2 = \operatorname{Re}\left[(\, f \pm g \,|\, f \,) \pm (\, f \pm g \,|\, g \,)\right],
\end{aligned}$$

y como $\pm \operatorname{Re}[z] \leq |z| = \sqrt{(\operatorname{Re}[z])^2 + (\operatorname{Im}[z])^2}$, entonces:

$$\|\, f \pm g \,\|^2 \leq |(\, f \pm g \,|\, f \,)| + |(\, f \pm g \,|\, g \,)|.$$

Usando Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}
&\|\, f \pm g \,\|^2 \leq \|\, f \pm g \,\| \cdot \|\, f \,\| + \|\, f \pm g \,\| \cdot \|\, g \,\| \,, \\
&\|\, f \pm g \,\| \leq \|\, f \,\| + \|\, g \,\| \,.
\end{aligned}$$

q.e.d.

1.2 Sucesiones de funciones

Definición 1.6 *Sea $f_n(t)$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$, una sucesión de funciones. Si $\forall\, t_0 \in [a, b]$ fijo, y $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N$ tal que*

$$|f_n(t_0) - F(t_0)| < \epsilon \qquad \text{para} \qquad n > N, \tag{1.8}$$

*entonces decimos que $f_n(t_0)$ **converge simplemente** a $F(t_0)$ y se escribe $f_n(t_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(t_0)$. Observemos que N depende posiblemente de t_0.*

Definición 1.7 *Una sucesión de funciones $f_n(t)$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$, **converge uniformemente** a $F(t)$ si $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N$ tal que*

$$|f_n(t) - F(t)| < \epsilon \qquad \text{para } n > N \text{ y } \forall\, t \in [a, b]. \tag{1.9}$$

Escribiremos en tal caso $f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{unif} F(t)$.

Definición 1.8 *La **distancia** entre dos funciones $f,\, g \in \mathcal{C}\,[a, b]$ se define por*

$$\|\, f - g \,\| = \sqrt{\int_a^b (f - g)^*(f - g)}. \tag{1.10}$$

A partir de la definición y las propiedades de la norma, se tiene

$$\| f - g \| = 0 \Longleftrightarrow f(t) = g(t) \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Definición 1.9 *Una sucesión de funciones $f_n(t)$ con $n = 0, 1, 2, \ldots,$* **converge en la norma** *a $F(t)$ si $\forall\, \epsilon > 0\ \ \exists\, N$ tal que*

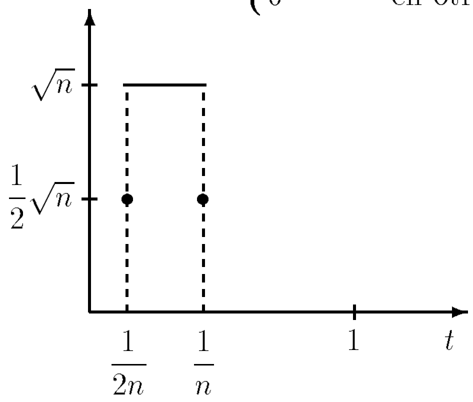
$$\| f_n - F \| < \epsilon \qquad \text{para } n > N. \tag{1.11}$$

Escribiremos en tal caso $f_n \xrightarrow{N} F$ o bien $\lim_{n\to\infty} \| f_n - F \| = 0$.

Ilustraciones

1) En el intervalo $[0, 1]$ consideremos la función

$$f_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } t \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{n} & \text{si } t = \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Notemos que $f(t)$ desarrolla un gran *peak* cerca de $t = 0$ cuando $n \to \infty$.

a) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Si $t = 0$, $f_n(t) = 0$, $\forall\ n$. Si $t \neq 0$, $0 < t < 1$, tomando $N > 1/t$ se tiene que si $n > N \Longrightarrow t > 1/n \Longrightarrow f_n(t) = 0\ \forall\, n > N = 1 + \text{Entera}\left[\frac{1}{t}\right]$

b) $f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif}} 0$.

Dado n, y suponiendo que existe N, basta seleccionar $t \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ para que crezca sobre cualquier cota.

c) $f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{N} 0$.

$$\| f_n - 0 \|^2 = \int_0^1 dt \,|\, f_n(t) \,|^2 = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} dt\, (\sqrt{n}\,)^2 = \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2} \quad \forall\, n$$

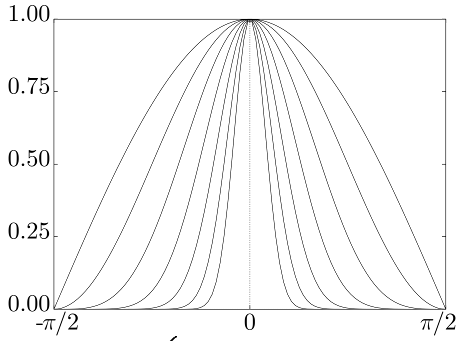
2)

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } t > \frac{1}{n} \end{cases} \quad .$$

$f_n(t)$ no puede converger a cero uniformemente, pues $f_n(0) = 1 \neq 0$, pero sí en la norma:

$$\| f_n - 0 \|^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} dt \; | f_n(t) |^2 = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \; .$$

3) Sea $f_n(t) = \cos^n t$, con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $n \in \mathbb{N}$. Claramente $f_n \in \mathcal{C}\,[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.



$$f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{f}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ con } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

La función $\overline{f}(t) \in \mathcal{C}\,[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Además, claramente f_n no converge uniformemente a $\overline{f}(t)$. Es decir, el N que debo elegir de manera que $\left| f_n(t) - \overline{f}(t) \right|$ sea tan pequeño como se quiera, $\forall\, n > N$, depende sensiblemente del t que elija.

Por otra parte, $F(t) \equiv 0$, $\forall\, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, entonces, $f_n(t) \xrightarrow{N} F(t)$, es decir

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, N \text{ tal que } \| f_n - F \| < \epsilon \qquad \text{para } n > N.$$

Considerando que $F(t)$ es nula en todo el intervalo, tenemos para la diferencia en la norma de las dos funciones

$$\| f_n \| = \sqrt{\int_a^b \cos^{2n} t \, dt} < \epsilon \; .$$

Obtenemos como corolario de estos ejemplos: la convergencia en la norma no implica convergencia simple ni convergencia uniforme.

Proposición Convergencia uniforme en un intervalo finito implica convergencia en la norma.

Demostración Sea $\epsilon > 0$ $\exists\, N_0$ tal que

$$| f_n(t) - F(t) | < \epsilon, \quad \forall\, n > N_0 \text{ y } \forall\, t \in [a, b] \quad ,$$

luego

$$\| f_n - F \| = \sqrt{\int_a^b |\, f_n(t) - F(t)\,|^2 \, dt} \leq \sqrt{\int_a^b \epsilon^2 \, dt} = \sqrt{\epsilon^2 (b-a)} = \epsilon\sqrt{b-a} \ ,$$

lo cual nos da una cota para la norma:

$$\| f_n - F \| < \epsilon\sqrt{b-a} \quad \forall\, n > N_0 \ .$$

q.e.d.

Teorema de Weierstrass (sin demostración)

Sea f continua en $[a,b]$, entonces se tiene que $\forall\,\epsilon > 0$ existe un polinomio $p(t)$ tal que:

$$|\, f(t) - p(t)\,| < \epsilon \quad \forall\, t \in [a,b]. \tag{1.12}$$

(Es decir, f es aproximable uniformemente por polinomios.)

Proposición Sea $f \in \mathcal{C}_o\,[a,b]$. $\forall\,\epsilon > 0$ dado, existe un polinomio p tal que $\| f - p \| < \epsilon$.

Demostración Usando el teorema de Weierstrass, sabemos que existe un polinomio $p(t)$ tal que

$$|\, f(t) - p(t)\,| < \frac{\epsilon}{\sqrt{b-a}} \quad \forall\, t \in [a,b] \ ,$$

luego

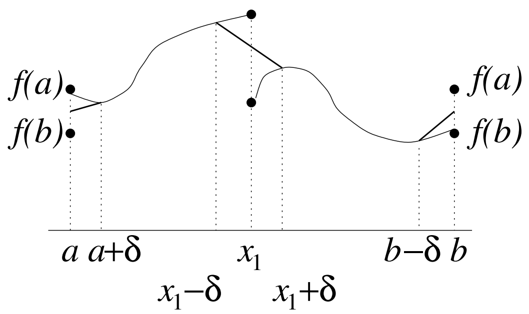
$$\| f - p \| = \sqrt{\int_a^b |\, f(t) - p(t)\,|^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b \frac{\epsilon^2}{b-a}\, dt} = \epsilon,$$

$$\| f - p \| \leq \epsilon$$

q.e.d.

Proposición $\forall\, g \in \mathcal{C}\,[a,b]$ se puede construir una función $f \in \mathcal{C}_o\,[a,b]$ tal que $\| g - f \| < \epsilon$, donde ϵ es arbitrario.

Demostración Sea $g \in \mathcal{C}\,[a,b]$ con K discontinuidades en $\{t_i\}_{i=1}^n$ dentro del intervalo $[a,b]$ y sea $M = \max\limits_{a \leq t \leq b} |\, g(t)\,|$. Consideremos una función $f \in \mathcal{C}_o\,[a,b]$ definida de modo que coincida con g, salvo en una vecindad de ancho 2δ:



Tenemos que $|\, f(t)\,| \leq M \;\forall\, t \in [a,b]$. Usando la desigualdad triangular:

$$|\, g(t) - f(t)\,| \leq |\, g(t)\,| + |\, f(t)\,| \leq 2M,$$

con lo cual podemos acotar la distancia entre las funciones

$$\|\, g - f\,\|^2 = \int_a^b |\, g(t) - f(t)\,|^2 \; dt = \sum_{\nu=1}^{K} \int_{t_\nu-\delta}^{t_\nu+\delta} |\, g(t) - f(t)\,|^2 \; dt \leq 2\delta(2M)^2 \left(\sum_{\nu=1}^{K} 1 \right) = \epsilon \;.$$

Ya que δ lo podemos hacer arbitrariamente pequeño, tenemos demostrada la proposición.

q.e.d.

Las últimas dos proposiciones conducen al siguiente teorema:

Teorema de Aproximación Una función $g \in \mathcal{C}\,[a,b]$ se puede aproximar en la norma por un polinomio $p(t)$ tal que $\|\, g - p\,\| < \epsilon$ arbitrario.

Demostración Sea $f \in \mathcal{C}_o\,[a,b]$ tal que $\|\, g - f\,\| < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $p(t)$ un polinomio tal que $\|\, f - p\,\| < \frac{\epsilon}{2}$. Luego

$$\|\, g - p\,\| = \|\, g - f + f - p\,\| \leq \|\, g - f\,\| + \|\, f - p\,\| < \epsilon.$$

q.e.d.

El teorema de Weierstrass se puede generalizar a funciones de más de una variable. Esto permite resultados como el siguiente.

Proposición Sea $f \in \mathcal{C}_o\,[-\pi,\pi]$, entonces existe un polinomio trigonométrico que aproxima a f uniformemente.

Demostración Sea $f \in \mathcal{C}_o\,[-\pi,\pi]$. Construimos una función $F(r,\theta) = r f(\theta)$. Claramente $F(r,\theta)$ es continua en todo el plano $x - y$. Sea $\tilde{F}(x,y) \equiv F(r,\theta)$. Usando el teorema de Weierstrass tenemos que existen $a_{\mu\nu}$ tales que

$$\left| \tilde{F}(x,y) - \sum_{\substack{\mu=0,1,\ldots,n \\ \nu=0,1,\ldots,n}} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \right| < \epsilon \qquad \forall\, x,y \text{ en el plano } x - y.$$

Reemplazando $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, podemos reescribir la doble suma

$$\sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} r^{\mu+\nu} \cos^\mu(\theta)\,\mathrm{sen}^\nu(\theta).$$

Evaluemos en $r = 1$. Además, sabemos que un producto de la forma $\cos^\mu\theta\,\mathrm{sen}^\nu\theta$ se puede escribir como una combinación lineal de productos de la forma $\cos(m\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)$. Tenemos entonces

$$\left| f(\theta) - \sum_{m,n} b_{mn} \cos(m\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta) \right| < \epsilon \quad \forall\, \theta \in [-\pi,\pi].$$

q.e.d.

Definición 1.10 *El conjunto de funciones $\{\varphi_n(t)\}_{n=0,\pm 1,\pm 2,\dots}$ se dice **ortonormal** si*

$$(\,\varphi_n\,|\,\varphi_m\,) = \delta_{n\,m} \qquad \forall\, n, m. \tag{1.13}$$

Ilustración

Como ejemplo de funciones ortonormales tenemos las $c_n(t) \in \mathcal{C}_o\,[-\pi,\pi]$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ que se definen como

$$c_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}.$$

Claramente:

$$(\,c_n\,|\,c_m\,) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}\,dt = \delta_{n\,m} \qquad \forall\, n, m.$$

Definición 1.11 *Un conjunto de funciones $\{\varphi_n(t)\}_{n=0,\pm 1,\pm 2,\dots,\nu}$ se dice **linealmente dependiente** cuando*

$$\sum_{n=1}^{\nu} a_n \varphi_n(t) = 0, \qquad \forall\, t \in [a, b], \tag{1.14}$$

*es posible sin que todos los a_n sean nulos. En caso contrario son **linealmente independientes**.*

Proposición Un sistema ortogonal de funciones es siempre linealmente independiente ($l.i.$). (Demostración como ejercicio.)

1.3 Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea $\{v_\nu\}_{\nu=1,2,\dots}$ un conjunto linealmente independiente de funciones en $\mathcal{C}\,[a, b]$. Para construir un conjunto ortonormal debemos seguir los siguientes pasos:

– Construimos $\varphi_1 = \dfrac{v_1}{\|\,v_1\,\|}$ tal que $(\,\varphi_1\,|\,\varphi_1\,) = 1$.

– Considerar $\overline{\varphi}_2 = v_2 - (\,\varphi_1\,|\,v_2\,)\,\varphi_1$. Entonces

$$(\,\overline{\varphi}_2\,|\,\varphi_1\,) = (\,v_2\,|\,\varphi_1\,) - (\,\varphi_1\,|\,v_2\,)^*\,(\,\varphi_1\,|\,\varphi_1\,) = (\,v_2\,|\,\varphi_1\,) - (\,v_2\,|\,\varphi_1\,) = 0.$$

Luego, normalizando,

$$\varphi_2 = \frac{\overline{\varphi}_2}{\|\,\overline{\varphi}_2\,\|}.$$

– Ahora tomamos $\overline{\varphi}_3 = v_3 - (\,\varphi_1 \,|\, v_3\,)\,\varphi_1 - (\,\varphi_2 \,|\, v_3\,)\,\varphi_2$. Se puede comprobar que efectivamente $(\,\overline{\varphi}_3 \,|\, \varphi_1\,) = (\,\overline{\varphi}_3 \,|\, \varphi_2\,) = 0$. Finalmente, normalizando,

$$\varphi_3 = \frac{\overline{\varphi}_3}{\|\,\overline{\varphi}_3\,\|}.$$

– Y continuamos en forma análoga para el resto de los vectores.

El conjunto de funciones $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ construido de la manera anterior es un conjunto ortonormal.

Ejercicio. Para el conjunto de funciones $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ encontrar el sistema ortonormal en el intervalo $[-1, +1]$. Compare su resultado con los polinomios de Legendre.

1.4 Coeficientes de Fourier

Sea $\{\varphi_n(t)\}_{n=1,2,\ldots}$ un conjunto ortonormal de funciones tal que $\varphi_n \in \mathcal{C}\,[a,b]\,\forall\, n$. Sea $f(t)$ una función tal que $\int_a^b |\,f(t)\,|^2\; dt < \infty$. Deseamos aproximar $f(t)$ por una suma finita

$$S_I(t) = \sum_{n\in I} C_n \varphi_n(t)\ ,$$

de manera que $\|\,f - S_I\,\|$ sea mínimo (siendo I un conjunto de índices prescrito). Es decir, el objetivo es encontrar los coeficientes C_n de modo que el error cuadrático medio:

$$M_I(f) = \|\,f - S_I\,\|^2 = \int_a^b \left|\, f(t) - \sum_{n\in I} C_n \varphi_n(t) \right|^2 \, dt\ ,$$

sea mínimo. Evaluemos el error cuadrático medio

$$\begin{aligned}
M_I(f) &= \int_a^b |\,f\,|^2 + \sum_{n\in I} |\,C_n\,|^2 \int_a^b |\,\varphi_n\,|^2 - \sum_{n\in I} C_n \int_a^b f^* \varphi_n - \sum_{n\in I} C_n^* \int_a^b f \varphi_n^* \\
&= \|\,f\,\|^2 + \sum_{n\in I} |\,C_n\,|^2 - \sum_{n\in I} C_n (\,\varphi_n \,|\, f\,)^* - \sum_{n\in I} C_n^* (\,\varphi_n \,|\, f\,) \\
&\quad + \sum_{n\in I} |\,(\,\varphi_n \,|\, f\,)\,|^2 - \sum_{n\in I} |\,(\,\varphi_n \,|\, f\,)\,|^2 \\
&= \|\,f\,\|^2 - \sum_{n\in I} |\,(\,\varphi_n \,|\, f\,)\,|^2 + \sum_{n\in I} |\,C_n - (\,\varphi_n \,|\, f\,)\,|^2 \geq 0\ ,
\end{aligned}$$

ya que la norma es mayor igual a cero siempre. Claramente el mínimo se obtiene cuando $C_n = (\,\varphi_n \,|\, f\,)$. De lo anterior se desprende:

$$\sum_{n\in I} |\,C_n\,|^2 = \sum_{n\in I} |\,(\,\varphi_n \,|\, f\,)\,|^2 \leq \|\,f\,\|^2 \qquad \text{Desigualdad de Bessel} \tag{1.15}$$

Definición 1.12 *Los coeficientes* $(\,\varphi_n \mid f\,)$ *son llamados* **los coeficientes de Fourier** *de* f *respecto del sistema ortonormal* $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\ldots}$.

Definición 1.13 *Si un conjunto de funciones* $\{\varphi_n\}$ *en cierto espacio permite aproximar en la norma, con sus combinaciones lineales, cualquier función* f *del espacio tan bien como se quiera, i.e.*

$$\left\| f - \sum_n a_n \varphi_n \right\| < \epsilon, \qquad \text{para } \epsilon \text{ arbitrario,}$$

se dice que es un **conjunto completo** *respecto a este espacio.*

Sean $C_n = (\,\varphi_n \mid f\,)$ los coeficientes de Fourier de f respecto de un conjunto ortonormal $\{\varphi_n\}$, entonces la completitud de este conjunto se puede expresar por

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{m} C_n \varphi_n \right\| = 0 \ ,$$

lo que también podemos escribir como

$$f \stackrel{N}{=} \sum_{\{\varphi_n\}} C_n \varphi_n \ .$$

Lo anterior **no** implica que $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(t)$, salvo en el caso que la serie converja uniformemente. Si

$$f \stackrel{N}{=} \sum_{\{\varphi_n\}} C_n \varphi_n$$

entonces

$$\|\, f \,\|^2 = \left\| \sum_{\{\varphi_n\}} C_n \varphi_n \right\|^2 ,$$

luego se cumple

$$\|\, f \,\|^2 = \int_a^b |\, f \,|^2 = \sum_n |\, C_n \,|^2 \qquad \text{Igualdad de Parseval} \tag{1.16}$$

Ejemplo El conjunto $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal completo respecto a $[-\pi, \pi]$.

$$f(t) \stackrel{N}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |\, f \,|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, C_n \,|^2 = \|\, f \,\|^2 \,.$$

Teorema Si el conjunto ortonormal $\{\varphi_n\}$ es completo respecto a $\mathcal{C}\,[a,b]$, entonces en $\mathcal{C}$ la única función ortonormal a todo φ_n es $f(t)\equiv 0$.

Demostración Si $f(t_0)\neq 0$, la función también es no nula en una vecindad en torno a t_0, por lo tanto

$$\int_a^b |\,f\,|^2 = \|\,f\,\|^2 > 0 \ ,$$

pero usando la igualdad de Parseval tenemos para la norma de f

$$\|\,f\,\|^2 = \sum_n |\,C_n\,|^2 = \sum_n |\,(\,\varphi_n\,|\,f\,)\,|^2 > 0 \ ,$$

es decir, f no es ortogonal a todos los φ: ¡contradicción! Luego f debe ser idénticamente nula.

q.e.d.

Teorema Sea $\{S_n(t)\in\mathcal{C}_o\,[a,b]\}$; si existe $F(t)$ tal que la sucesión $S_n(t)=\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\varphi_\nu(t)$ converge uniformemente, *i.e.*

$$S_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif}} F(t) \ ,$$

entonces $F(t)$ es continua, $F(t)\in\mathcal{C}_o\,[a,b]$.

Demostración

$$\begin{aligned}
|\,F(t)-F(t')\,| &= |\,F(t)-S_n(t)+S_n(t)-S_n(t')+S_n(t')-F(t')\,| \\
&\leq |\,F(t)-S_n(t)\,|+|\,S_n(t)-S_n(t')\,|+|\,S_n(t')-F(t')\,| \ .
\end{aligned}$$

De la convergencia uniforme, existe un $N(\epsilon)$ tal que, si $n>N(\epsilon)$ se cumple que

$$|\,F(t)-S_n(t)\,| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\, t\in[a,b] \ ,$$

luego

$$|\,F(t)-F(t')\,| < \frac{2}{3}\epsilon + |\,S_n(t)-S_n(t')\,| \ .$$

Pero $S_n(t)$ es continua. Dado t fijo, y ϵ arbitrario, $\exists\ \delta$ tal que

$$|\,t-t'\,|<\delta \Longrightarrow |\,S_n(t)-S_n(t')\,| < \frac{1}{3}\epsilon \Longrightarrow |\,F(t)-F(t')\,| < \epsilon \ .$$

q.e.d.

Este teorema asegura que una función discontinua **no puede** ser aproximada uniformemente por una familia de funciones continuas (Por ejemplo, las funciones sinusoidales).

Teorema Si dos funciones $f, g \in \mathcal{C}\,[a,b]$ tienen igual expansión en base completa (en el sentido de aproximación en la norma), entonces $f(t) = g(t)$.

Demostración Sean

$$S(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\,\varphi_\nu \,|\, f\,)\,\varphi_\nu(t)$$

la aproximación en la norma para f y g. Luego

$$\|\, f - S\,\| = \|\, g - S\,\| = 0\ .$$

Así

$$\|\, f - g\,\| = \|\, f - S + S - g\,\| \leq \|\, f - S\,\| + \|\, S - g\,\| = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow f = g\ .$$

q.e.d.

Notar que este teorema es falso fuera de $\mathcal{C}\,[a,b]$. Por ejemplo,

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

tiene igual expansión que $g(t) = 0$.

Teorema Sea $\{\varphi\}_{\nu=0}^{\infty}$ un conjunto ortonormal en $\mathcal{C}\,[a,b]$ y $f \in \mathcal{C}\,[a,b]$. Entonces la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\,(\,\varphi_\nu \,|\, f\,)\,|^2$ converge. En particular,

$$(\,\varphi_\nu \,|\, f\,) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0\ .$$

Demostración De la desigualdad de Bessel,

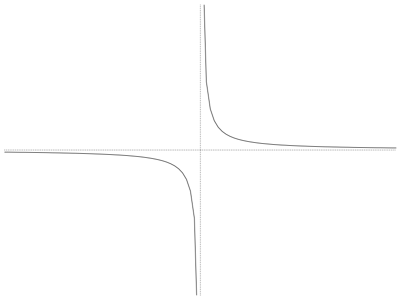
$$\sum_{n\in I} |\, c_n\,|^2 \leq \|\, f\,\|^2 = \int_a^b dx\ \ |\, f(t)\,|^2\ \ ,$$

como el lado derecho es independiente de I, la suma está acotada superiormente. Siendo todos sus términos positivos, debe converger. Luego $(\,\varphi_\nu \,|\, f\,) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$.

q.e.d.

1.5 Integrales impropias (valor principal)

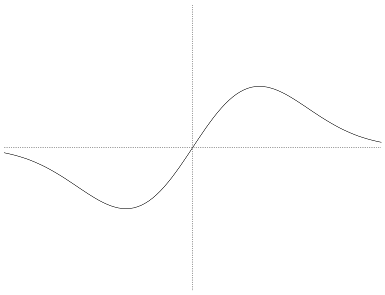
Considere la función $f(t) = \dfrac{1}{t}$.



Una integral como $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ no está bien definida. Sin embargo, debiera ser nula simplemente por paridad. Para conciliar estos hechos, podemos enteder este tipo de integrales, en intervalos simétricos en torno a la divergencia ($t = 0$ en este caso), de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}\!\!\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{-1}^{\epsilon} f(t)\,dt + \int_{\epsilon}^{1} f(t)\,dt = 0\right\}. \tag{1.17}$$

En el caso de funciones impares que son asíntotas al eje x,



podemos definir la integral de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{G\to\infty}\left\{\int_{-G}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{G} f(t)\,dt = 0\right\}. \tag{1.18}$$

Definición 1.14 *Valor principal de una integral. Sea $t_0 \in [a, b]$, $f(t)$ integrable en la unión $[a, t_0 - \epsilon] \cup [t_0 + \epsilon, b]$, $\forall\, \epsilon > 0$, $f(t)$ singular si $t \to t_0$. Si existe el límite*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{a}^{t_0-\epsilon} f(t)\,dt + \int_{t_0+\epsilon}^{b} f(t)\,dt\right] \equiv \mathcal{P}\!\!\int_{a}^{b} f(t)\,dt\ , \tag{1.19}$$

se le llama el valor principal de la integral.

Ejemplo Sea

$$f(t) = \frac{1}{t - t_0}\,g(t)\ , \quad \text{con } g(t) \text{ derivable en } t_0\ .$$

$$\fint_a^b f(t)\,dt \;=\fint_a^b \frac{g(t)}{t-t_0}\,dt \;=\int_a^b \left[\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right]\,dt + g(t_0)\log\left(\frac{b-t_0}{t_0-a}\right)\;.$$

Si $f(t)$ es integrable en todo intervalo finito de $\mathbb{R}$, entonces, de existir, se define

$$\fint_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(t)\,dt\;. \tag{1.20}$$

Ejemplo La integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx\; 1/x$ sólo existe como valor principal en torno a x_0 entre $-\infty$ y $+\infty$, y vale cero.

1.6 Convergencia según Cesàro

Considere la expansión en serie

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Ella converge para $|\,x\,| < 1$. A pesar de lo anterior evaluemos la función y su expansión en serie en $x = -1$:

$$\left.\frac{1}{1-x}\right|_{x=-1} = \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\;.$$

¿Será posible sumar la serie de modo que ésta sí converja al valor de la función en ese punto?

Consideremos las sumas parciales: $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 0$ y así sucesivamente. Claramente no es convergente, sin embargo, si consideramos los promedios de las sumas parciales, encontramos que ellos sí convergen y lo hacen al valor de la función en ese punto. En efecto:

$$S_0 = 1\;,\qquad \frac{S_0+S_1}{2} = \frac{1}{2}\;,\qquad \frac{S_0+S_1+S_3}{3} = \frac{2}{3}\;,\qquad \frac{S_0+S_1+S_3+S_4}{4} = \frac{1}{2}\;,$$

$$\frac{S_0+\cdots+S_5}{5} = \frac{3}{5}\;,\ldots \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu}{n} = \frac{1}{2}\;.$$

Definición 1.15 *Consideremos la suma parcial*

$$S_N = \sum_{\ell=0}^{N} T_\ell\;.$$

*Definimos **la suma de Cesàro** de esta serie como:*

$$S^*_\infty = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{N=0}^{M-1} S_N = \lim_{M\to\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(1-\frac{\ell}{M}\right)T_\ell \tag{1.21}$$

(reagrupando la suma finita).

El factor $(1-\ell/M)$ aparece como un factor de convergencia, que permite que los términos de orden más alto pesen menos al sumar (logrando así la convergencia de la serie), pero desapareciendo al tomar el límite $M \longrightarrow \infty$, de modo que la suma converja al valor de la suma original.

Siguiendo con el ejemplo de la serie goemétrica,

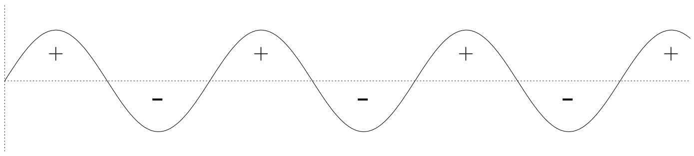
$$T_\ell = (-1)^\ell \Longrightarrow S_{2N} = 1, \quad S_{2N+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{*}(-1)^n = \frac{1}{M}(1+0+1+0+\cdots) \simeq \frac{1}{M}\left(\frac{M}{2}\right) = \frac{1}{2} \,.$$

La convergencia ordinaria necesita que el $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ exista.

La convergencia según Cesàro necesita que el $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu$ exista.

Problemas similares a la serie discreta anterior ofrece calcular la integral, desde cero hasta infinito, de una función oscilante, que no decrece, del tipo $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}(\omega x)\, dx$:



En el mismo espíritu del caso discreto, proponemos la siguiente definición.

Definición 1.16 *Definimos una **integral Cesàro** de la siguiente manera:*

$$\lim_{y\to\infty}{}^{*}\!\int_0^\infty f(t)\,dt = \frac{1}{y}\left\{\int_{x=0}^{y} dx \int_{t=0}^{x} dt\, f(t)\right\} \,. \tag{1.22}$$

Podemos encontrar una expresión alternativa para la integral de Cesàro integrando por partes la ecuación (1.22):

$$\begin{aligned}
{}^{*}\!\int_0^\infty f(t)\,dt &= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\left[\int_{x=0}^{y} dx \int_{t=0}^{x} dt\, f(t)\right] \\
&= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\left[x\int_0^x f(t)\,dt\Big|_0^y - \int_0^y x f(x)\,dx\right] \\
&= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\left[y\int_0^y f(t)\,dt - \int_0^y x f(x)\,dx\right] \\
{}^{*}\!\int_0^\infty f(t)\,dt &= \lim_{y\to\infty}\int_0^\infty \left(1-\frac{x}{y}\right) f(x)\,dx \,. \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

Vemos aquí cómo el factor $(1 - \ell/M)$ en el caso discreto (1.21) proviene simplemente de reordenar la suma. La expresión formal (1.23) permite ver la aparición de un factor de convergencia $(1 - x/y)$, pero no es necesariamente útil en la práctica.

Evaluemos como ejemplo la integral Cesàro de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\omega x)$ con $\omega \neq 0$, usando la ecuación (1.22) directamente.

$$\begin{aligned} {}^{*}\!\int_0^\infty \operatorname{sen}(\omega t)\, dt &= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y}\left[\int_{x=0}^{y} dx \int_{t=0}^{x} dt\, \operatorname{sen}(\omega t)\right] \\ &= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y}\int_0^y \left[\frac{1-\cos(\omega x)}{\omega}\right] dx \\ &= \lim_{y\to\infty}\left[\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\operatorname{sen}(\omega y)}{y}\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{{}^{*}\!\int_0^\infty \operatorname{sen}(\omega t)\, dt = \frac{1}{\omega}} \tag{1.24}$$

Ejercicio Evalúe ${}^{*}\!\int_0^\infty \cos(\omega t)\, dt$, con $\omega \neq 0$.