Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Método de la Física Matemática II

Tarea 1
12 de Agosto 1998
fecha de entrega: 20 de Agosto 1998.

Profesor: José Rogan
Ayudante: Holger Leoro

1. Demuestre que el conjunto de funciones

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \cos(nkx), \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \mathrm{sen}(nkx) \right\} \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in [x_o, x_o + \lambda] \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

   es un conjunto ortonormal.

2. (a) Obtener los desarrollos de Fourier de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \qquad x \in [0, 2\pi] \\ f(x) &= x^2, \qquad x \in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

   (b) A partir de los desarrollos anteriores obtener

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

3. Sea $f(x) \in \mathcal{C}\,[a,b]_o$ (bien comportada), en el intervalo $[x_o, x_o + \lambda]$. A partir de

$$f(x) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nkx) + b_n \,\mathrm{sen}(nkx)$$

   Obtener la fórmula de Parseval

$$\frac{1}{\lambda} \int_{x_o}^{x_o+\lambda} |\, f(x)\,|^2 \, dx = \frac{1}{2} a_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right)$$

4. Si

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_{\mathrm{B}}T} - 1},$$

   demuestre que

$$U(T) \equiv \int_0^{\infty} u(\nu, T)\, d\nu = \frac{8\pi^5 k_{\mathrm{B}}^4}{15 h^3 c^3}\, T^4 \equiv \sigma T^4.$$

   Evalúe σ si

$$\begin{aligned} k &= 1.38 \times 10^{-16} \text{ [erg/K]} \\ h &= 6.63 \times 10^{-27} \text{ [erg s]} \\ c &= 3.00 \times 10^{+10} \text{ [cm/s]} \end{aligned}$$

5. (a) Determinar la evolución temporal de una cuerda con extremos fijos en $x = 0$ y $x = \ell$, si inicialmente sus perfiles de deformación y velocidad son:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \dfrac{\ell}{2} \\ -\dfrac{2h}{\ell}x + 2h & \dfrac{\ell}{2} \leq x \leq \ell \end{cases} \qquad \text{(Perfil de deformación)}$$

$$g(x) = -x(x - \ell) \qquad x \in [0, \ell] \qquad \text{(Perfil de velocidades)}$$

(b) Repetir el cálculo anterior para los perfiles

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{\ell}\, x \\ g(x) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{\ell}\, x \end{aligned}$$