Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Método de la Física Matemática II

Tarea 2
19 de Agosto 1998
fecha de entrega: 27 de Agosto 1998.

Profesor: José Rogan
Ayudante: Holger Leoro

1. Considere una cuerda enrollada en un tambor cilíndrico de diametro lo suficientemente grande de modo que la curvatura de la cuerda sea despreciable. Resuelva la ecuación de ondas
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$
Encuentre los modos normales de oscilación, muestre que forman un conjunto ortonormal. Encuentre todas las frecuencias propias del sistema y de una expasión explícita para condiciones iniciales arbitrarias (perfiles de deformación y de velocidad)

   Hint: Buscar soluciones de la forma $U(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, e imponer la condición de borde
$$U(x+L,t) = U(x,t) \quad \forall\, x, \text{ donde } L \text{ es el perímetro de la cuerda}$$

2. Considere ahora un paralelepípedo de lados L_x, L_y y L_z. Resuelva la ecuación de ondas en tres dimensiones
$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$
Use como condición de borde el hecho que la función U se anula en la frontera del sistema. Encontrar los modos normales de oscilación y muestre que forman un conjunto ortonormal. De expansiones explícitas para las condiciones iniciales arbitrarias:
$$\begin{aligned} U(\vec{x},0) &= f(\vec{x}), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(\vec{x},0) &= g(\vec{x}) \end{aligned}$$

3. Demuestre que la transformada seno de Fourier y coseno de Fourier de $x^{-\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$ están respectivamente dadas por:
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_S\{x^{-\alpha}\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega^{\alpha-1}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(1-\alpha) \\ \mathcal{F}_C\{x^{-\alpha}\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega^{\alpha-1}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(1-\alpha) \end{aligned}$$
donde Γ es la función gama definida por:
$$\Gamma(1-\alpha) \equiv \int_0^\infty e^{-y} y^{-\alpha}\, dy$$