Mecánica Cuántica I
Tarea Nº 1

Prof. : J. Rogan
Ayud. : V. Muñoz

Fecha de publicación: 11 de abril de 2001.
Fecha de entrega: 19 de abril de 2001.

1. Muestre que en un scattering de Compton, producto del cual, respecto a la dirección de incidencia del fotón, el electrón es dispersado en un ángulo ϕ y el fotón en un ángulo θ, la relación entre estos ángulos viene dada por:
$$\cot\phi = \left(1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}\right)\tan(\theta/2) \ .$$

2. Considerar los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 4, definidos en $-1 \leq x \leq 1$, para los cuales se define el producto interno:
$$(P(x), Q(x)) = \int_{-1}^{1} P(x)\, Q(x)\, dx \ .$$
A partir de la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ obtener una base ortonormal y representar el vector $\psi(x) = x^2 - 1$ respecto de ella.

3. En el espacio vectorial del problema anterior, considere el operador
$$\check{A} P_n(x) = \frac{dP_n}{dx} \ .$$
Encontrar la matriz $\mathcal{A}$ que representa a $\check{A}$ en la base $\{\phi_n = x^n/n!\}$.
Encontrar la matriz $\mathcal{B}$ del operador $\check{A}^2 = d^2/dx^2$ y verificar que $\mathcal{B} = \mathcal{A}^2$.

4. Sea $\check{H}$ un operador autohermítico definido positivo, i.e.
$$\langle u|\check{H}|u\rangle \geq 0 \qquad \forall\ |u\rangle \ .$$
Demostrar que cualesquiera que sean $|u\rangle$ y $|v\rangle$,
$$|\langle u|\check{H}|v\rangle|^2 \leq \langle u|\check{H}|u\rangle\langle v|\check{H}|v\rangle \ ,$$

y que la igualdad $\langle u|\check{H}|u\rangle = 0$ implica necesariamente $\check{H}|u\rangle = 0$. Demostrar, por otra parte, que $\mathrm{tr}\,\check{H} \geq 0$ y que la igualdad no se cumple más que si $\check{H} = 0$.

5. Demuestre que:

   (a) $e^{\check{S}\check{A}\check{S}^{-1}} = \check{S}e^{\check{A}}\check{S}^{-1}$.

   (b) Si $\check{A}$ es diagonalizable, entonces $\det e^{\check{A}} = e^{\mathrm{tr}\,\check{A}}$.

   (c)
   $$\frac{d\check{A}^{-1}(\lambda)}{d\lambda} = -\check{A}^{-1}(\lambda)\frac{d\check{A}(\lambda)}{d\lambda}\check{A}^{-1}(\lambda)\ .$$

6. (a) Considere los siguientes operadores hermíticos:
   $$\check{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad \check{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$
   Encuentre los autoestados y autovalores de $\check{A}$ y $\check{B}$, evalúe $\check{C} = -i[\check{A}, \check{B}]$ y verifique que $\Delta\check{A}\,\Delta\check{B} \geq |\langle\check{C}\rangle|/2$.

   (b) Considere el operador:
   $$\check{A} = \begin{pmatrix} -7 & -20i \\ -6i & 15 \end{pmatrix}\ .$$
   Calcule $e^{i\check{A}}$ y verifique que la matriz resultante sea unitaria.