Mecánica Cuántica I
Tarea Nº 2

Prof. : J. Rogan
Ayud. : V. Muñoz

Fecha de publicación: 24 de abril de 2001.
Fecha de entrega: 2 de mayo de 2001.

1. Sean $\check{A}$ y $\check{B}$ dos operadores hermíticos que satisfacen la relación de conmutación
$$[\check{A}, \check{B}] = i\check{C} \ ,$$
en que $\check{C}$ es también un operador autoadjunto. Sea $|\psi\rangle$ un estado arbitrario, $\check{A}' = \check{A} - \langle \check{A} \rangle_\psi$ y $\check{B}' = \check{B} - \langle \check{B} \rangle_\psi$, en que $\langle \check{A} \rangle_\psi = \langle \psi | \check{A} | \psi \rangle$.
Considere la función del parámetro real α, $I(\alpha) = \langle \varphi | \varphi \rangle$, con $|\varphi\rangle = (\alpha \check{A}' - i\check{B}')|\psi\rangle$.
   (a) Demuestre que
$$I(\alpha) = \langle \check{A}'^2 \rangle \left\{ \alpha + \frac{\langle \check{C} \rangle}{2\langle \check{A}'^2 \rangle} \right\}^2 + \langle \check{B}'^2 \rangle - \frac{\langle \check{C}^2 \rangle}{4\langle \check{A}'^2 \rangle} \ , \quad \forall \ \alpha \text{ real.}$$
   Use esto para redescubrir la relación de Heisenberg:
$$\langle \check{A}'^2 \rangle \langle \check{B}'^2 \rangle \geq \frac{\langle \check{C} \rangle^2}{4} \ .$$
   (b) Si $\alpha = -\langle \check{C} \rangle / (2\langle \check{A}'^2 \rangle)$, demuestre que
$$I(\alpha) = \int \left| \frac{\langle \check{C} \rangle \check{A}'}{2\langle \check{A}'^2 \rangle} + i\check{B}' \right|^2 |\psi(\vec{r})|^2 \, d\vec{r}$$
   (donde los operadores están en representación de coordenadas), y que por lo tanto la relación de Heisenberg se reduce a una igualdad en aquellos estados que satisfacen la ecuación
$$\left\{ \frac{\langle \check{C} \rangle \check{A}'}{2\langle \check{A}'^2 \rangle} + i\check{B}' \right\} |\psi\rangle = 0 \ .$$
   Determine estos estados en representación de coordenadas si $\check{A} = \check{x}$ y $\check{B} = \check{p}$ (una dimensión). Defina $x_0 = \langle \check{x} \rangle$ y $p_0 = \langle \check{p} \rangle$.

2. Considere el Hamiltoniano $\check{H} = \check{\vec{p}}^2/(2m) + V(\check{\vec{r}})$, con su conjunto de vectores propios $|k\rangle$ y valores propios E_k (espectro completamente discreto). Muestre que si $|l\rangle$ es cualquier ket propio, asociado a un valor propio E_l, se cumple:

$$\sum_k (E_k - E_l)|\langle k|\check{X}|l\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} ,$$

donde $\check{X}$ es una componente cartesiana de $\check{\vec{r}}$.

3. Una partícula está confinada al interior de una caja que está dividida en una parte izquierda y otra derecha por una membrana. Se cuenta con un detector que especifica totalmente el estado actual de la partícula, diciendo si se encuentra a la derecha o a la izquierda del recipiente. (A estos dos estados se les puede llamar $|D\rangle$ y $|I\rangle$, respectivamente, y se les puede considerar base ortonormal.) El Hamiltoniano es

$$\check{H} = E(|I\rangle\langle D| + |D\rangle\langle I|) .$$

   (a) Encuentre los autovalores y autovectores del sistema.

   (b) Muestre que hay efecto túnel, es decir, que si en $t = 0$ la partícula está a la izquierda, hay una probabilidad no nula de observarla a la derecha para $t > 0$. ¿Cuál es la probabilidad de observarla a la derecha como función del tiempo?

   (c) Suponga que erróneamente se usa $\check{H} = E(|D\rangle\langle I|)$. Muestre que en tal caso no se conserva la probabilidad.

4. Sea $\check{A}_\theta$ el operador asociado a la medición de cierta variable dinámica de un sistema dado en la dirección θ. En cierta base, este operador está representado por la matriz

$$A_\theta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} .$$

   (a) ¿Puede $\check{A}_\theta$ asociarse realmente a un observable físico?

   (b) Calcular los autovectores, ortonormalizarlos y verificar la completitud de la base obtenida.

(c) ¿Cuáles son los valores posibles que se obtienen al medir este observable?

(d) Se mide $\check{A}_z$ ($\check{A}_{\theta=0}$) y se obtiene como resultado a_1 ($\geq a_2$.) Se vuelve a medir $\check{A}_z$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a_2?

(e) Se mide $\check{A}_z$ y se obtiene a_1. Luego se mide $\check{A}_\theta$ (θ arbitrario). ¿Qué se obtiene? ¿Hay algún θ para el cual se obtenga a_2 con certeza?

(f) Se mide $\check{A}_z$ y se obtiene a_2. Luego se mide $\check{A}_{\pi/2}$ y se obtiene a_1. ¿Qué probabilidad hay de obtener a_2 al medir $\check{A}_z$?