Mecánica Cuántica I
Tarea Nº 7

Prof. : J. Rogan
Ayud. : V. Muñoz

Fecha de publicación: 26 de junio de 2001.
Fecha de entrega: 4 de julio de 2001.

1. Suponga que tiene un operador $\check{\vec{L}}$ y otro $\check{\vec{S}}$ tales que

$$
\begin{aligned}
[\check{L}_i, \check{L}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\check{L}_k \ , \\
[\check{S}_i, \check{S}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\check{S}_k \ , \\
[\check{L}_i, \check{S}_j] &= 0 \quad \forall\, i, j \ .
\end{aligned}
$$

   a) Calcule $[\check{\vec{L}}, \check{\vec{L}} \cdot \check{\vec{S}}]$, $[\check{\vec{S}}, \check{\vec{L}} \cdot \check{\vec{S}}]$.

   b) Verifique que $[\check{\vec{J}}, \check{\vec{L}} \cdot \check{\vec{S}}] = 0$, con $\check{\vec{J}} = \check{\vec{L}} + \check{\vec{S}}$.

2. Suponga que un electrón en un átomo de hidrógeno está descrito por una función de onda que es la combinación lineal más general del subespacio de degeneración del valor $E = -R/4$, con R la constante de Rydberg.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de medir $L_z = 0$ en este estado?

   b) Suponga que se mide L^2 y L_z, obteniéndose los valores $(2\hbar^2, \hbar)$. ¿Cuál es el valor de $\langle r \rangle$ en el estado en que queda el átomo?

   c) ¿Cambia el valor de $\langle r \rangle$ si se hubiera obtenido $(2\hbar^2, -\hbar)$ o $(2\hbar^2, 0)$?

3. Sea $\check{H}$ el Hamiltoniano para el átomo de hidrógeno

$$
\check{H} = \frac{\check{\vec{p}}^{\,2}}{2\mu} - \frac{e^2}{r} \ .
$$

   Demuestre que el *vector de Runge-Lenz*

$$
\check{\vec{\mathbf{K}}} = \frac{1}{2\mu e^2}\left(\check{\vec{\mathbf{L}}} \times \check{\vec{\mathbf{p}}} - \check{\vec{\mathbf{p}}} \times \check{\vec{\mathbf{L}}}\right) + \frac{\check{\vec{\mathbf{r}}}}{r}
$$

conmuta con $\check{H}$ y que cumple $\check{\vec{\mathbf{L}}} \cdot \check{\vec{\mathbf{K}}} = \check{\vec{\mathbf{K}}} \cdot \check{\vec{\mathbf{L}}} = 0$, y que

$$[\check{K}_i, \check{K}_j] = i\hbar \left(-\frac{2E}{\mu e^4} \right) \epsilon_{ijk} \check{L}_k \ .$$

Muestre que el operador $\check{\vec{\mathbf{A}}} = \sqrt{-\mu e^4/2E}\check{\vec{\mathbf{K}}}$ definido en el subespacio de estados ligados del átomo de hidrógeno con energía E ($E \leq 0$) satisface las relaciones de conmutación:

$$[\check{A}_i, \check{A}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \check{L}_k$$

e infiera que los operadores

$$\check{\vec{\mathbf{J}}} = \frac{1}{2}\left(\check{\vec{\mathbf{L}}} + \check{\vec{\mathbf{A}}}\right) \qquad \check{\vec{\mathbf{J}}}' = \frac{1}{2}\left(\check{\vec{\mathbf{L}}} - \check{\vec{\mathbf{A}}}\right)$$

obedece las relaciones de conmutación de momento angular y la condición $\check{\vec{\mathbf{J}}}^{\,2} = \check{\vec{\mathbf{J}}}'^{\,2}$. Derive la identidad

$$\check{\vec{\mathbf{J}}}^{\,2} + \check{\vec{\mathbf{J}}}'^{\,2} = -\frac{1}{2}\hbar^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu e^4}{2E}$$

y deduzca de ella la expresión para los niveles de energía del átomo de hidrógeno.