Capitulo 1: Cinemática en 1 Dimensión

Índice

Veremos como describir el movimiento de una partícula en una dimensión.

1. Velocidad Promedio e instantánea

Tenemos el siguiente gráfico de la **posición** como función del tiempo 1a. Esto puede representar un viaje en auto por ejemplo. Podemos escribir la ecuación de la posición como

$$x(t) = \begin{bmatrix} 200t & 0 \leq t \leq 1 \\ 200 + 100t & 1 \leq t \leq 2 \\ 300 & 2 \leq t \leq 3 \\ 300 - 200t & 3 \leq t \leq 4 \end{bmatrix}$$

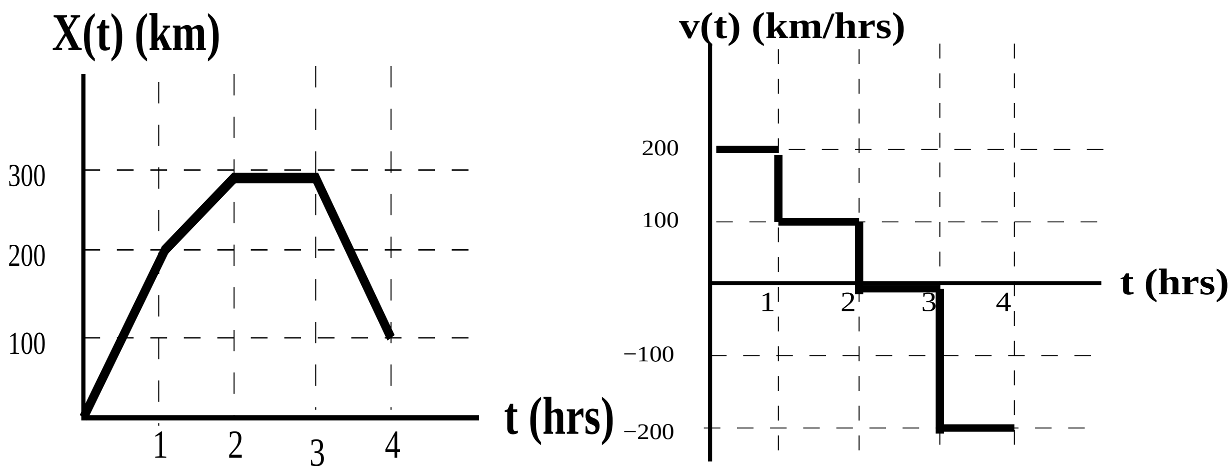

Figura 1: (a) Posición en el tiempo. (b) Velocidad en el tiempo

Dado que las velocidades son constantes en los intervalos de tiempo podemos usar la formula de la velocidad promedio

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

para calcular el gráfico de la velocidad 1b utilizando $\Delta t = 1$, ya que la velocidad en estos intervalos es constante. La ecuación de la velocidad esta dada por

$$v(t) = \begin{bmatrix} 200 & 0 \leq t \leq 1 \\ 100 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & 2 \leq t \leq 3 \\ -200 & 3 \leq t \leq 4 \end{bmatrix}$$

La velocidad promedio depende de tiempo inicial t y del intervalo de tiempo Δt en cuestión

$$v_{av}(t, \Delta t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Notemos que la velocidad promedio es la pendiente del gráfico de posición $x(t)$ vs tiempo t, por lo menos para intervalos donde la velocidad es constante. En la Fig. 2 tenemos diferentes velocidades promedio para diferentes tiempos iniciales y/o intervalos.

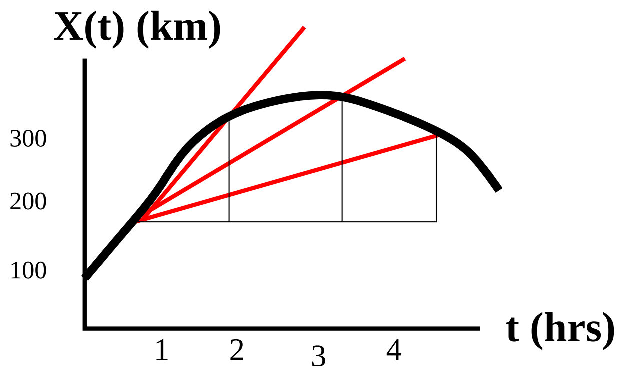

Figura 2: (a) Posición en el tiempo con lineas que describen la velocidad promedio para diferentes valores de Δt.

Podemos finalmente que hemos definido los siguientes conceptos:

1. La **posición** $x(t)$ como función del tiempo
2. El **desplazamiento** Δx
3. La **velocidad promedio** v_{av} en un intervalo Δt como función del tiempo
4. La **velocidad instantánea** $v(t)$ en el instante t. El gráfico Fig. 1b representa la velocidad instantánea o la pendiente del gráfico de la posición Fig. 1a. En este caso particular en todos los intervalos la velocidad es constante y por lo tanto la velocidad instantánea es la misma que la promedio
5. La **rapidez** es el valor absoluto de la velocidad

2. Velocidad instantánea vs velocidad promedio

La vida en general no es tan fácil como en la Fig. 1, pero probablemente similar a la Fig. 2 ya que es difícil mantener la velocidad constante por un intervalo de una hora y también nosotros sabemos que en la practica los cambios de velocidad no son bruscos como se muestran en Fig. 1b.

Hasta ahora hemos sido capaces de transformar del gráfico de posición al gráfico de velocidad instantánea (y viceversa) sin problemas, porque la velocidad en el intervalo en cuestión era constante. Por lo tanto se podía utilizar la velocidad promedio. Pero que pasa si la velocidad no es constante en un intervalo? Como podemos calcular la velocidad instantánea?

La respuesta esta en la Fig.2 donde nos podemos dar cuenta que a medida que achicamos Δt la velocidad promedio $v_{av}(t, \Delta t)$ se acerca mas y mas a la pendiente instantánea del gráfico $x(t)$ vs t en el instante t. Escribimos esto en forma abstracta como

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{av}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Esto quiere decir que a medida que Δt tiende a cero (a medida que Δt se hace pequeño) la velocidad promedio tiende a la velocidad instantánea v(t) en el instante t. La velocidad instantánea es la pendiente instantánea del gráfico de posición vs tiempo. Esto es el concepto de limite y derivada.

En general por convención se puede usar las siguientes definiciones para una derivada de $x(t)$,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = \dot{x}$$

3. Limites y Derivadas

Tomemos una función f(t). Decimos que el limite de $f(t)$ a medida que t tiende a un valor a es $f(a)$, porque a medida que t se acerca al valor a, la función $f(t)$ se acerca al valor $f(a)$. Y lo escribimos como

$$\lim_{t \to a} f(t) = f(a)$$

Por ejemplo, si tenemos la función $f(t) = 5t^2$, entonces

$$\lim_{t \to 3} f(t) = f(3) = 5 \times 3^2 = 45$$

porque a medida que t se acerca a $t = 3$, la función $f(t)$ se acerca a 45. Por ejemplo, tomemos la secuencia de valores de t que se van acercando a 3, dada por $\{1, 2, 2{,}5, 2{,}9, 2{,}99, 2{,}999\}$. Utilizando estos valores, la función $f(t)$ se acerca es $\{f(1) = 5, f(2) = 20, f(2{,}5) = 31{,}25, f(2{,}9) = 42{,}05, f(2{,}99) = 44{,}7005, f(2{,}999) = 4{,}940005\}$. De la misma forma

$$\lim_{t \to 7} f(t) = f(7) = 5 \times 7^2 = 295$$

La derivada de una función arbitraria $f(t)$ en el instante t se define como

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

y notemos que según nuestra análisis

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

En realidad existen varias formas de calcular una derivada. Por ejemplo podríamos mirar hacia atrás en el tiempo con un Δt negativo, y definir

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t)-f(t-\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t-\Delta t)}{2\Delta t} \end{aligned}$$

o mirar hacia adelante y hacia atrás al mismo tiempo. En general vamos a usar la primera forma. Estas tres formas de la derivada dan el mismo resultado a menos que tengamos un punto donde la pendiente mirando hacia adelante y hacia atrás en el tiempo sea diferentes. Este es el caso en la Fig. 1a en los instantes $t = 1, 2, 3$. Por ejemplo, en el instante $t = 1$ la derivada hacia adelante nos daría 100 km/hr, mientras que la derivada hacia atrás nos daría 200 km/hr. Cuando esto ocurre tenemos una discontinuidad en la velocidad (derivada) como se muestra en a Fig. 1.

3.1. Casos de interés

Veamos algunos casos de interés.

3.1.1. Caso $x(t) = c$

Por ejemplo, si $x(t) = 5$. Hemos visto que si la posición no cambia, la velocidad es cero. Por lo tanto nuestra intuición dice que la pendiente, o derivada, también debería ser cero. Veamos como funciona esto matemáticamente. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5-5}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{0}{\Delta t} \end{aligned}$$

Tomemos la función $x(t) = c$ con c como constante en el tiempo. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c-c}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{0}{\Delta t} \end{aligned}$$

porque $x(t + \Delta t) = c$ ya que es constante para todos los tiempos.

Notemos que primero hicimos todas las simplificaciones antes de tomar el limite $\Delta \to 0$, sino, hubiéramos tenido algo dividido por cero, lo que no esta definido y nuestra definición seria inútil. Por eso el concepto de limite quiere decir **a medida que Δt se acerca a cero, pero no es cero exactamente**.

3.1.2. Caso $f(t) = v_o \times t$

Por ejemplo, si $x(t) = 5t$. Hemos visto que si la posición cambia linealmente, la velocidad es constante, y dada por v_o. Por lo tanto nuestra intuición dice que la pendiente, o derivada, también debería ser la constante v_o. Veamos como funciona esto matemáticamente.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{5(t+\Delta t)-5t}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{5\Delta t}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0} 5\\
&= v_o
\end{aligned}
$$

Tomemos la función $x(t) = v_o \times t$ con v_o como constante en el tiempo. Tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{vo\times(t+\Delta t)-vo\times t}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{vo\times\Delta t}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0} v_o\\
&= v_o
\end{aligned}
$$

porque el limite de una constante v_o es v_o.

Nuevamente, notemos que primero hicimos todas las simplificaciones antes de tomar el limite $\Delta \to 0$, sino, hubiéramos tenido algo dividido por cero, lo que no esta definido y nuestra definición seria inútil.

3.1.3. Caso $x(t) = at^2$

Por ejemplo, si $x(t) = 5t^2$. El gráfico se muestra en Fig. 3a. Notemos que la pendiente aumenta en el tiempo. Matemáticamente tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{5(t+\Delta t)^2-5t}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{5(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)-5t^2}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{25t\Delta t-5\Delta t^2}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0} 10t-5\Delta t\\
&= 10t
\end{aligned}
$$

porque el limite del segundo termino es cero, ya que

$$\lim_{\Delta t\to 0} 5\Delta t = 0$$

Vemos que la velocidad aumenta con el tiempo como suponíamos. Podemos ver gráficamente que esta pendiente es razonable, ya que si utilizamos $\Delta t = 0{,}25$ y estimamos la pendiente en $t = 1, 2, 3$, vemos que tenemos gráficamente mas o menos $v \sim 10, 20, 30$. Esto es correcto ya que la ecuación nos da que exactamente $v = 10, 20, 30$ en $t = 1, 2, 3$ respectivamente.

Tomemos la función $f(t) = at^2$ con a como constante en el tiempo. Veamos que nos sugieren las matemáticas. Tenemos

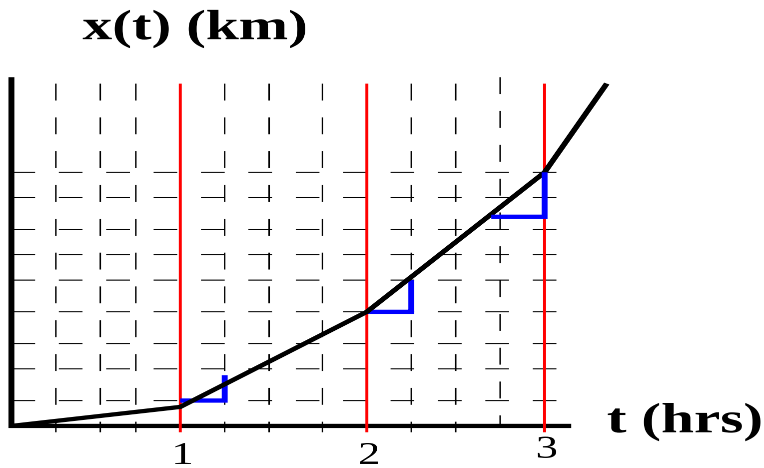

Figura 3: Posicionó en el tiempo para $x(t) = 5t^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{df(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{a(t+\Delta t)^2-at}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{a(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)-at^2}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{2at\Delta t-a\Delta t^2}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} 2at - a\Delta t \\
&= 2at
\end{aligned}$$

porque el limite del segundo termino es cero, ya que

$$\lim_{\Delta t\to 0} a\Delta t = 0$$

Nuevamente, notemos que primero hicimos todas las simplificaciones antes de tomar el limite $\Delta \to 0$, sino, hubiéramos tenido algo dividido por cero, lo que no esta definido y nuestra definición seria inútil.

En este caso la pendiente depende del tiempo, como debería ser, ya que sabemos que la pendiente de la parábola $f(t) = at^2$ cambia en el tiempo, y cambia precisamente como $2at$.

3.1.4. Otros casos

El caso general de la función $f(t) = ct^n$ con c y n constantes es

$$\frac{df(t)}{dt} = cnt^{n-1}$$

3.1.5. Suma de dos funciones

Queremos probar que si $f(t) = h(t) + g(t)$ entonces

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{dh(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

Para esto tomemos el limite

$$\begin{aligned}
\frac{f(t)g(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[h(t+\Delta t) + g(t+\Delta t)] - [f(t)g(t)]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{dh(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}
\end{aligned}$$

3.1.6. Movimiento acelerado

Supongamos que tenemos

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{a_o}{2}(t - t_o)^2$$

Es fácil darse cuenta que la derivada total de $x(t)$ en el instante t es la suma de las derivadas de cada termino. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
v(t) = \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d[x_o]}{dt} + \frac{d[v_o(t-t_o)]}{dt} + \frac{d[a_o(t-t_o)^2/2]}{dt} \\
&= vo + a_o(t - t_o)
\end{aligned}$$

4. Velocidad instantánea y aceleración

Notemos que en los casos simples como en la Fig. 1 donde las velocidades eran constantes somos capaces de reconstruir la el gráfico de la posición a partir del gráfico de la velocidad. Pero también somos capaces de construir el gráfico de la velocidad a partir de la posición. Lo primero de llama **integrar** y lo segundo se llama **derivar**.

De la misma forma que definimos la velocidad promedio $v_{av}(t, \Delta t)$ podemos definir la aceleración promedio en un intervalo como

$$a_{av}(t, \Delta t) = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

y por supuesto también podemos definir la aceleración instantánea como

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

con lo cual tenemos el diagrama de Fig. 4.

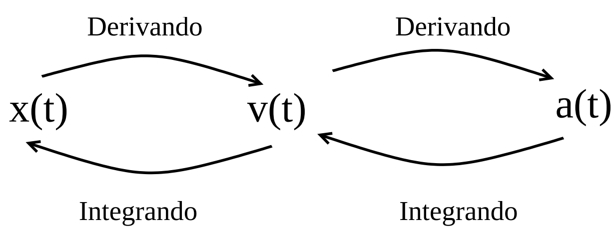

Figura 4: (a) Como pasamos de la posición a la velocidad y a la aceleración derivando y como pasamos de la aceleración a la velocidad a la posición integrando.

1. Que unidades tiene la aceleración? Como pasamos de m/s^2 a km/hr^2?

2. En general cuando manejamos nuestro auto nosotros controlamos la aceleración del auto. Por lo tanto sera importante aprender a integrar (mas adelante).

3. Si tenemos la posición en el tiempo

   $$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a_o(t - t_o)^2$$

   vemos que tenemos para la velocidad y la aceleración

   $$\begin{aligned} v(t) = \tfrac{x(t)}{dt} &= v_o + a_o(t - t_o) \\ a(t) = \tfrac{v(t)}{dt} &= a_o \end{aligned}$$

   lo que corresponde a un movimiento uniformemente acelerado.

a) Cuando un auto acelera (con aceleración constante a), se aleja en forma cuadrática. Lo mismo cuando desacelera pero con a negativa.

b) graficar $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ para el movimiento acelerado uniforme $a > 0$

c) graficar $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ para el movimiento desacelerado uniforme $a < 0$

d) que pasa cuando $a = 0$

Hay veces en las cuales no estamos interesados en el tiempo explícitamente, pero solo en una relación entre tiempo y distancia. Para el caso particular del movimiento uniformemente acelerado podemos resolver el tiempo de la ecuación de la velocidad

$$(t - t_o) = \frac{v(t) - v_o}{a_o}$$

y reemplazar en la ecuación de la posición y obtener

$$v^2 - v_o^2 = 2a_o(x - x_o)$$

Problema 1:Ahora podemos graficar las aceleración y frenadas de nuestro auto en viaje. Escribir la ecuación de $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$. Es importante darse cuenta que la ecuaciones de movimiento aplican en cada intervalo donde la aceleración es constante. Por lo tanto en cada intervalo aplica

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_o) + v(t_o)(t - t_o) + \tfrac{1}{2}a(t_o)(t - t_o)^2 \\ v(t) = \tfrac{x(t)}{dt} &= v_o + a(t_o)(t - t_o) \\ a(t) = \tfrac{v(t)}{dt} &= a(t_o) \end{aligned}$$

En cada intervalo tenemos que calcular la aceleración, como se muestra en la Fig. 6 tomando la derivada que corresponda.

1. Intervalo $t_o = 0$ a $t = 1$ hrs, tenemos que encontrar a_o y v_o, dado que $x_o = 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= v_o t + a_o t^2/2 \\ v(t) &= v_o + a_o t \end{aligned}$$

Sabemos que $x(1) = 50$ km pero necesitamos otra relación. La otra relación es con la velocidad. Tenemos dos posibilidades. Uno es darse cuenta que la velocidad es cero en $t = 0$, ya que la pendiente se hace cero. También podemos darnos cuenta que en el intervalo $t_o = 1$ a $t_f = 2$ hrs la velocidad es constante (linea recta) y por lo tanto

$$v(1) = v_{av}(t = 1, \Delta t = 1) = \frac{x(2) - x(1)}{\Delta t} = 100 km/hr$$

con esto podemos obtener que $v(1) = 100$ km/hr y $a_o = 100$ km/hr^2.

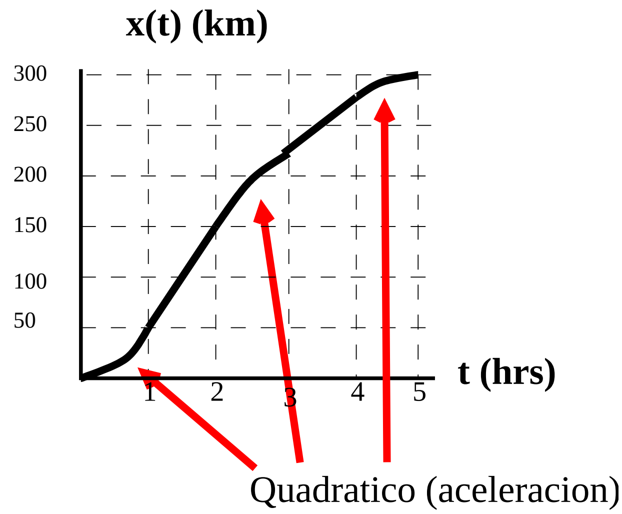

Figura 5: (a) Posición de nuestro auto

2. Intervalo $t_o = 1$ a $t = 2$ hrs, tenemos $x(1) = 50$ km, $a_o = 0$ km/hr^2 (linea recta), $v(t) = 100$ km/hr y $x(t) = 50 + 100(t-1)$.

3. Intervalo $t_o = 2$ a $t = 3$ hrs, tenemos $x_o = 150$, $v_o = 100$ km/hr pero necesitamos resolver a_o. Podemos evaluar $x(t) = 150 + 100(t-2) + a_o(t-2)^2/2$ en $x(3) = 225$ km para obtener $a_o = -50$ km/hr^2. Con esto $v(t) = 100 - 50(t-2)$ km/hr.

4. Intervalo $t_o = 3$ a $t = 4$ hrs, tenemos $x(3) = 225$ km, $a_o = 0$ km/hr^2, $v(3) = 50$ km/s, $x(0) = 225$ km. Podemos calcular $x(t) = 225 + 50(t-3)$ km y $v(t) = 50$ km/hr

5. Intervalo $t_o = 4$ a $t = 5$ hrs, tenemos $x_o = 275$, $v_o = 50$ km/hr pero necesitamos resolver a_o. Podemos evaluar $x(t) = 275 + 50(t-4) + a_o(t-4)^2/2$ en $x(4) = 300$ km para obtener $a_o = -50$ km/hr^2. Con esto $v(t) = 50 - 50(t-4)$ km/hr.

Con lo cual obtenemos la Fig. 6b-c.
La ecuación para la posición es

$$x(t) = \left[\begin{array}{ll} 50t^2 & 0 \le t \le 1 \\ 50 + 100(t-1) & 1 \le t \le 2 \\ 150 + 100(t-2) - 25(t-2)^2 & 2 \le t \le 3 \\ 225 + 50(t-3) & 3 \le t \le 4 \\ 275 + 50(t-4) - 25(t-4)^2 & 4 \le t \le 5 \end{array} \right.$$

De esta ecuación podemos inmediatamente tomar derivadas para obtener la velocidad

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \left[\begin{array}{ll} 100t & 0 \le t \le 1 \\ 100 & 1 \le t \le 2 \\ 100 - 50(t-2) & 2 \le t \le 3 \\ 50 & 3 \le t \le 4 \\ 50 - 50(t-4) & 4 \le t \le 5 \end{array} \right.$$

y la aceleración

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & 1 \le t \le 2 \\ -50 & 2 \le t \le 3 \\ 0 & 3 \le t \le 4 \\ -50 & 4 \le t \le 5 \end{bmatrix}$$

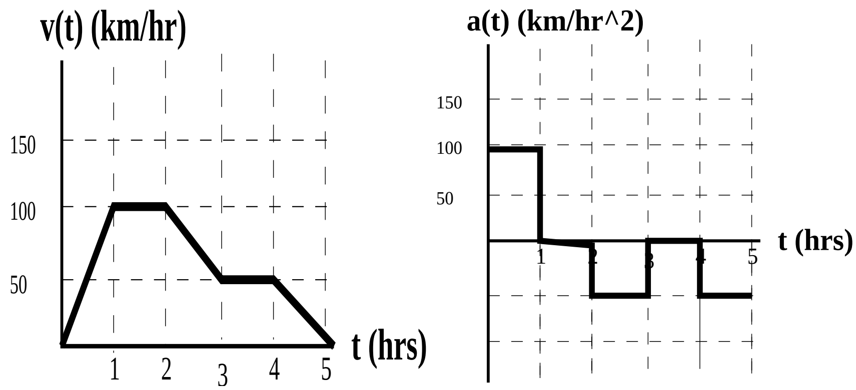

Figura 6: (a) velocidad y (b) aceleración de nuestro auto

Problema 2:Algunas preguntas interesantes con respecto al gráfico de posición vs. tiempo de Fig. 7

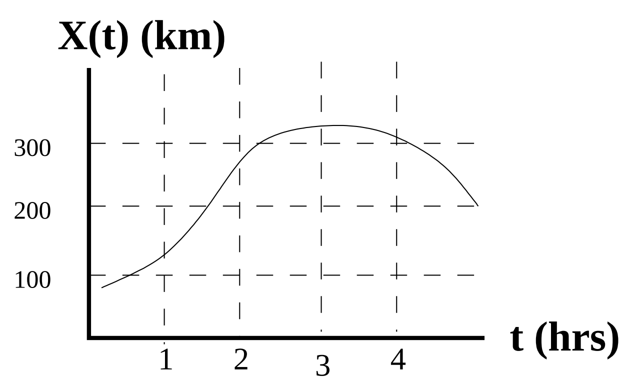

Figura 7: (a) Posición

1. donde es la velocidad mayor?
2. donde es menor?
3. es la velocidad negativa en algún instante?
4. que pasa en el máximo de x? cuanto es v?

5. que podemos decir de la aceleración?

6. estimemos el gráfico de velocidad. Debería ser similar a Fig. 8a

7. donde es la aceleración mayor?

8. donde es menor?

9. cuando frena?

10. cuando es la aceleración máxima, mínima?

11. cuando es la distancia máxima?

12. estimemos el gráfico de aceleración. Debería ser similar a Fig. 8b

13. que nos falta para poder estimar el gráfico de posición?

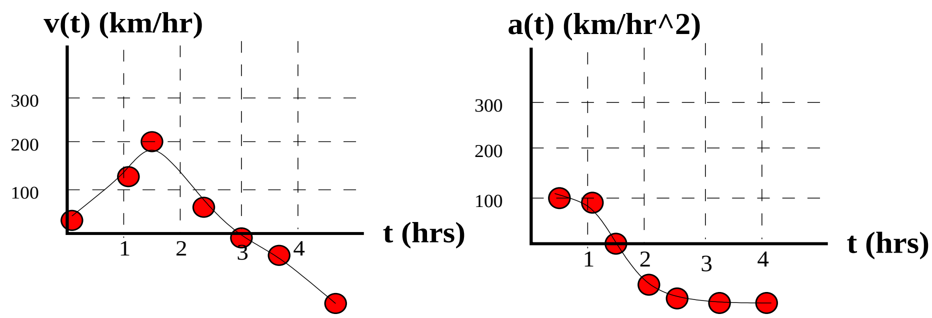

Figura 8: (a) Velocidad, (b) Aceleración.

5. Integrar

Ahora estamos interesados en ir en la dirección opuesta. Acordemonos que cuando uno maneja lo que controla es la aceleración, por lo tanto nos interesa partir de la aceleración y construir el gráfico de la velocidad y la posición. Esto se llama integrar que es equivalente a la “anti-derivada”.

La pregunta que queremos hacernos es, dado que

$$\frac{df(t)}{dt} = g(t)$$

si sabemos g(t), que función es f(t)?

Por ejemplo, sabemos que si la aceleración $a = a_o$ es constante, entonces

$$v(t) = v(t_o) + a_o(t - t_o) \tag{1}$$

si asumimos que el intervalo parte de $t = t_o$. Esto es de alguna manera correcto ya que

$$\frac{d\,(v(t))}{dt} = \frac{d\,[v(t_o) + a_o(t - t_o)]}{dt} = a_o$$

Notemos que no es suficiente saber a(t), pero necesitamos saber la constante de integración $v(t = t_o) = v_o$ para encontrar la solución completa de $v(t)$. El gráfico de la aceleración no dice absolutamente nada sobre la velocidad inicial. Además, la forma de la ecuación 1 es precisamente para satisfacer la condición inicial $v(t = t_o) = v_o$

Como encontrar la función $f(t)$ que satisface

$$\frac{df(t)}{dt} = g(t)$$

si sabemos $g(t)$ y con la condiciones inicial $f(t = t_o) = f_o$? La solución la escribimos como

$$f(t) - f(t_o) = \int_{t=t_o}^{t} g(\tau)d\tau$$

Una situación interesante es por ejemplo

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & x_o + v_o(t - t_o) + \frac{a_o}{2}(t - t_o)^2 \\ v(t) & = & \frac{dx(t)}{dt} = v_o + a_o(t - t_o) \\ a(t) & = & \frac{dv(t)}{dt} = a_o \end{array} \tag{2}$$

porque podemos tomar la derivada de $x(t)$ y $v(t)$ respectivamente. Por ejemplo, dado que

$$x(t) - x(t_o) = \int_{t_o}^{t} v(\tau)d\tau$$

Caso 1: Si $v(t) = 0$ sabemos intuitivamente que $x(t) = x(t_o)$. Pero también matemáticamente tenemos mirando, Eq. 2 con $v_o = 0$ y $a_o = 0$, que

$$x(t) - x(t_o) = \int_{t_o}^{t} v(\tau)d\tau = 0$$

Caso 2: Si $v(t) = vo$ constante sabemos intuitivamente que $x(t) = x(t_o) + vo(t - t_o)$. Pero también matemáticamente tenemos mirando, Eq. 2 con $a_o = 0$, que

$$x(t) - x(t_o) = \int_{t_o}^{t} v(\tau) d\tau = v_o(t - t_o)$$

Caso 3: Si $v(t) = a_o(t - t_o)$ sabemos intuitivamente que $x(t) = x(t_o) + a_o(t - t)^2/2$. Pero también matemáticamente tenemos mirando, Eq. 2 con $v_o = 0$, que

$$x(t) - x(t_o) = \int_{t_o}^{t} v(\tau) d\tau = \frac{a_o}{2}(t - t_o)^2$$

Notemos que la constante de integración $v(t = t_o) = v_o$ es extremadamente necesaria para que se satisfaga las condiciones iniciales cuando evaluemos en $t = t_o$.

Notemos Que si $g(t)$ es una suma de funciones, entonces la integral de $g(t)$ es la suma de las integrales de cada termino de la suma. Tomemos el caso $v(t) = v_o + a_o(t - t_o)$, entonces

$$\begin{array}{lcl} \int_{t_o}^{t} [v_o] d\tau & = & v_o(t - t_o) \\ \int_{t_o}^{t} [a_o(\tau - t_o)] d\tau & = & \frac{a_o}{2}(t - t_o)^2 \end{array}$$

y por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} x(t) - x(t_o) & = & \int_{t_o}^{t} [v_o] d\tau + \int_{t_o}^{t} [a_o(\tau - t_o)] d\tau \\ & = & v_o(t - t_o) + \frac{a_o}{2}(t - t_o)^2 \end{array}$$

lo cual es correcto como se puede ver en la Ec. 2.

Notemos Que si $g(t) = a_o r(t)$ es una constante por una función, entonces la integral de $g(t)$ es la constante a_o por la integral de $r(t)$.

5.1. Integrales indefinidas

Dado que siempre tenemos que incluir una constante de integración, podemos definir la integral indefinida, donde la constante de integración no se incluye. Esto es

$$h(t) = \int^{t} [0]\, d\tau = c \qquad \frac{dh(t)}{dt} = 0$$

$$h(t) = \int^{t} [v_o]\, d\tau = v_o t \qquad \frac{dh(t)}{dt} = v_o$$

$$h(t) = \int^t [a_o\tau]\, d\tau = \frac{a_o}{2} t^2 \qquad\qquad \frac{dh(t)}{dt} = a_o t$$

$$h(t) = \int^t [c\tau^n]\, d\tau = \frac{c}{n+1} t^{n+1} \qquad\qquad \frac{dh(t)}{dt} = ct^n$$

siempre y cuando $n \neq -1$.

La integral definida que da la posición

$$x(t) - x_o = \int_{t_o}^{t} v(\tau) d\tau$$

y que es la solución de

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

con la condición inicial $x(t = t_o) = x_o$, la podemos escribir entonces como

$$x(t) - x_o = \int_{t_o}^{t} v(\tau) d\tau = h(t) \left.\right|_{t_o}^{t} = h(t) - h(t_o) \tag{3}$$

en función de la integral indefinida

$$h(t) = \int^t v(\tau) d\tau$$

Notemos que la condición de Eq. 3 es necesaria para que cuando $t = t_o$ tenemos $x(t) = x(t_o) = x_o$.

Problema 2: En el caso de $a = a_o$ constante con condiciones iniciales de $v(t = t_o) = v_o$ y $x(t = t_o) = x_o$ (condiciones iniciales, una para la velocidad y una para la posición) calcular la función de $v(t)$ y $x(t)$. Dado que

$$h(t) = \int^t a_o d\tau = a_o t$$

tenemos que

$$v(t) - v(t_o) = \int_{t_o}^{t} a_o d\tau = h(t) \left.\right|_{t_o}^{t} = a_o t - a_o t_o$$

por lo tanto

$$v(t) = v_o + a_o(t - t_o)$$

Para encontrar la posición $x(t)$ tenemos que integrar una vez mas

$$x(t) - x(t_o) = \int_{t_o}^{t} v(\tau) d\tau = \int_{t_o}^{t} [v_o + a_o\tau - a_o t_o] \, d\tau$$

Sabemos que

$$\begin{array}{rcl} h_1(t) & = & \int^t [v_o] \, d\tau = v_o t \\ h_2(t) & = & \int^t [a_o \tau] \, d\tau = \frac{a_o}{2} t^2 \\ h_3(t) & = & \int^t [-a_o t_o] \, d\tau = -a_o t_o t \end{array}$$

Entonces tenemos

$$\begin{array}{rcl} x(t) - x(t_o) & = & h_1(t) \left.\right|_{t_o}^{t} + h_2(t) \left.\right|_{t_o}^{t} + h_3(t) \left.\right|_{t_o}^{t} \\ & = & [v_o t - v_o t_o] + \left[\frac{a_o}{2} t^2 - \frac{a_o}{2} t_o^2\right] - [a_o t_o t - a_o t_o t_o] \\ & = & v_o(t - t_o) + \frac{a_o}{2}(t - t_o)^2 \end{array}$$

que es el resultado que teníamos antes.

5.2. Integral en forma abstracta

En forma abstracta sabemos que la derivada es la pendiente instantánea de la curva $f(t)$. Veremos ahora que la integral definida

$$\int_{t_o}^{t_1} g(\tau) d\tau$$

es exactamente el área bajo la curva de $g(t)$ entre $t = t_o$ y $t = t_1$.

Para el caso de velocidad constante, sabemos que

$$x(t_1) - x(t_o) = v_o(t_1 - t_o)$$

lo que es exactamente el área bajo la curva de $v(t) = v_o$ entre $t = t_o$ y $t = t_1$, como se muestra en la Fig. 9.

Ahora, si la función $g(t)$ fuera no constante, entonces tendríamos que sumar pequeñas áreas como vemos en la Fig. 10. Dividamos el intervalo entre $t = t_o$ y t en pequeños rectángulos de ancho Δt y alto g_i, Entonces el área bajo la curva $g(t)$ seria la función

$$f(t) = A(t_o, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} (g_i \Delta t)$$

y por lo tanto tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} & = & \frac{\sum_{i=1}^{N+1} g_i \Delta t - \sum_{i=1}^{N} g_i \Delta t}{\Delta t} \\ & = & \frac{g_{i+1} \Delta t}{\Delta t} = g_{i+1} = g(t + \Delta t) \end{array}$$

y por lo tanto en el limite $\Delta t \to 0$ tenemos

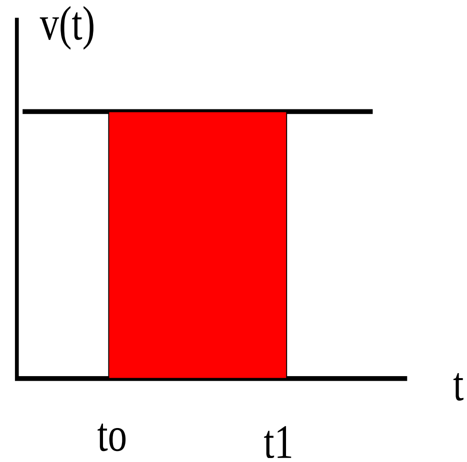

Figura 9: área bajo la curva de $v(t) = v_o$.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = g(t)$$

En conclusión la integral de g(t) es el área debajo de la curva de $g(t)$ entre $t = t_o$ y t.De la misma manera podemos decir que el área bajo la curva de $v(\tau)$ entre $\tau = t_o$ y $\tau = t$ describe el campo de posición de x(t) entre los tiempos $t = t_o$ y t.

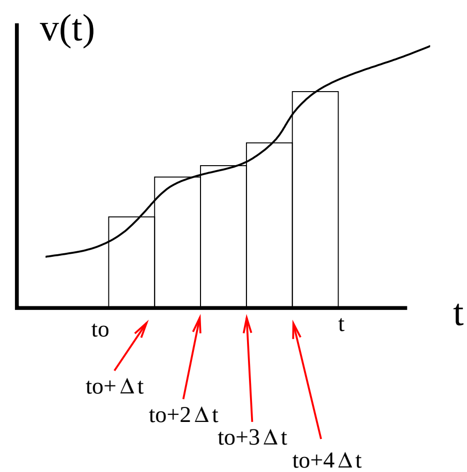

Figura 10: área bajo la curva de $v(t)$.

6. Problemas con 1 o mas cuerpos

Problema 3:Ahora podemos graficar las aceleración y frenadas de nuestro auto en viaje. Encuentre los gráficos para $x(t)$ y $a(t)$ partiendo del diagrama Fig. 11 asumiendo que el auto parte de $x(0) = 0$ (nuestro origen). Es importante darse cuenta que la ecuaciones de movimiento aplican en cada intervalo donde la aceleración es constante. Por lo tanto en cada intervalo aplica

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(t_o) + v(t_o)(t - t_o) + \tfrac{1}{2}a(t_o)(t - t_o)^2 \\
v(t) = \tfrac{x(t)}{dt} &= v_o + a(t_o)(t - t_o) \\
a(t) = \tfrac{v(t)}{dt} &= a(t_o)
\end{aligned}$$

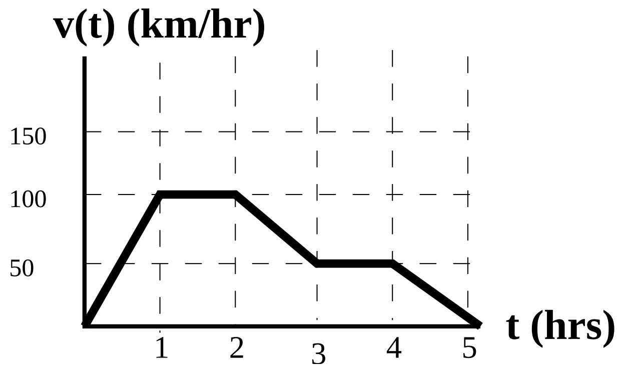

Figura 11: (a) velocidad de nuestro auto

En cada intervalo tenemos que calcular la aceleración, como se muestra en la Fig. 12b tomando la derivada que corresponda.

1. Intervalo $t_o = 0$ a $t = 1$ hrs, tenemos $a_o = 100$ km/hr^2 (de la pendiente), $v(0) = 0$ km/s, $x(0) = 0$ km. Podemos calcular

$$\begin{aligned}
x(1) &= 0 + 0 * (1 - 0) + \tfrac{100}{2}(1 - 0)^2 = 50 \\
v(1) &= 0 + 100(1 - 0) = 100
\end{aligned}$$

2. Intervalo $t_o = 1$ a $t = 2$ hrs, tenemos $a_o = 0$ km/hr^2, $v(1) = 100$ km/s, $x(1) = 50$ km. Podemos calcular

$$\begin{aligned}
x(1) &= 50 + 100 * (2 - 1) + \tfrac{0}{2}(2 - 1)^2 = 150 \\
v(1) &= 100 + 0(2 - 1) = 100
\end{aligned}$$

3. Intervalo $t_o = 2$ a $t = 3$ hrs, tenemos $a_o = -50$ km/hr^2 (de la pendiente), $v(2) = 100$ km/s, $x(2) = 150$ km. Podemos calcular

$$\begin{aligned}
x(1) &= 150 + 100 * (3 - 2) + \tfrac{-50}{2}(3 - 2)^2 = 225 \\
v(1) &= 100 + 50(3 - 2) = 50
\end{aligned}$$

4. Intervalo $t_o = 3$ a $t = 4$ hrs, tenemos $a_o = 0$ km/hr^2, $v(3) = 50$ km/s, $x(3) = 225$ km. Podemos calcular

$$
\begin{aligned}
x(1) &= 225 + 50 * (4-3) + \tfrac{0}{2}(4-3)^2 = 275 \\
v(1) &= 50 + 0(4-3) = 0
\end{aligned}
$$

5. Intervalo $t_o = 4$ a $t = 5$ hrs, tenemos $a_o = -50$ km/hr^2, $v(4) = 50$ km/s, $x(4) = 275$ km. Podemos calcular

$$
\begin{aligned}
x(1) &= 275 + 50 * (5-4) + \tfrac{-50}{2}(5-4)^2 = 300 \\
v(1) &= 50 - 50(5-4) = 0
\end{aligned}
$$

Con lo cual obtenemos la Fig. 12b-c

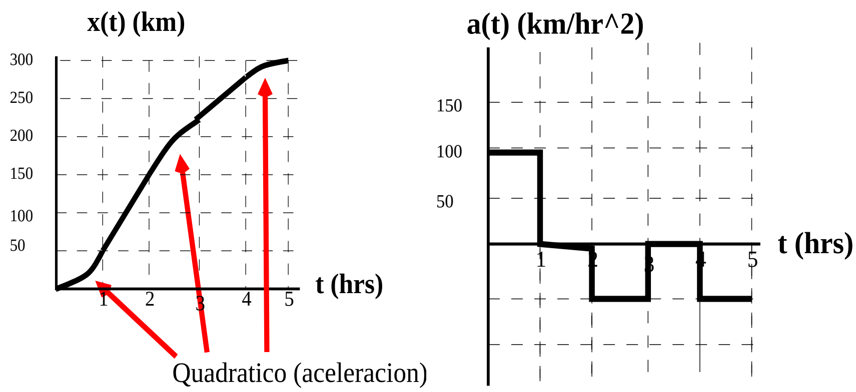

Figura 12: (a) posición y (b) aceleración de nuestro auto

Problema 4 supongamos que tenemos el gráfico de la aceleración de Fig. 13a y una velocidad inicial de $v(t=0) = v_o = 50km/hr$. Cual es la distancia recorrida luego de 3 horas?
En el intervalo de $t : 0 \rightarrow 1$ tenemos para la aceleración $a(t) = 50$ kms/hr^2. Por lo tanto

$$
\begin{array}{lll}
v(t) = v_o + a_o(t - t_o) & \rightarrow & v(1) = 50 + 50(1) = 100 \\
x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{a_o}{2}(t - t_o)^2 & \rightarrow & x(1) = 0 + 50(1) + 25(1)^2 = 75
\end{array}
$$

En el intervalo de $t : 1 \rightarrow 2$ tenemos para la aceleración $a(t) = 50 + 50(t-1)$ kms/hr^2. Por lo tanto

$$
\begin{array}{lll}
v(t) = v(1) + 50(t-1) + \frac{50}{2}(t-1)^2 & \rightarrow & v(2) = 100 + 50(1) + 25(1)^2 = 175 \\
x(t) = x(1) + v(1)(t-1) + \frac{50}{2}(t-1)^2 + \frac{50}{6}(t-1)^3 & \rightarrow & x(2) = 75 + 100(1) + 25(1)^2 + 50(1)^3/6 = 20
\end{array}
$$

En el intervalo de $t : 2 \rightarrow 3$ tenemos para la aceleración $a(t) = 100 - 150(t-1)$ kms/hr^2. Por lo tanto

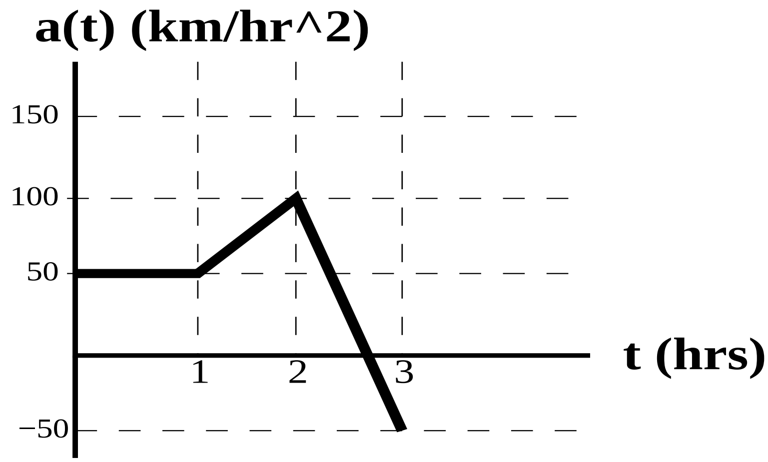

Figura 13: La aceleración a(t)

$$v(t) = v(2) + 100(t-2) - \frac{150}{2}(t-2)^2 \quad \rightarrow \quad v(3) = 175 + 100(1) - 75(1)^2 = 200$$
$$x(t) = x(2) + v(2)(t-2) + \frac{100}{2}(t-2)^2 - \frac{150}{6}(t-2)^3 \quad \rightarrow \quad x(3) = 208{,}3 + 175(1) + 50(1)^2 - 75(1)^3/6$$

Los gráficos de $v(t)$ y $x(t)$ están en la Fig. 14.

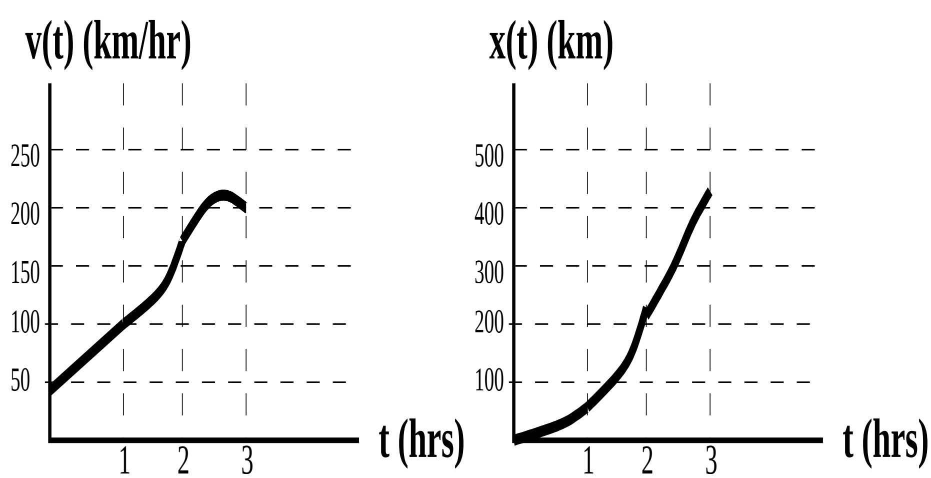

Figura 14: (a) v(t) y (b) $\Delta x(t)$ correspondiente a la aceleración de la Fig. 13a.

6.1. Problemas con gravedad

Es una observación razonable que todos los cuerpos bajo la fuerza de gravedad caen con la misma aceleración constante cerca de la tierra, esta aceleración constante es $a_o = g = 9{,}81$ m/s^2. Las diferencias observadas son debida a la fricción producida por el roce con el aire.

Problema 5 supongamos que lanzamos una piedra hacia arriba con una velocidad de 10 m/s. A que altura llega la piedra? Cuanto tiempo tenemos antes de que la piedra nos caiga en la cabeza? Con que velocidad me caería en la cabeza? Grafique $x(t)$. Utilice la aproximación $g = 10$ m/s^2.

La idea acá es utilizar las ecuaciones de movimiento para una aceleración constante $a_o = -g$. Notemos que si orientamos nuestro sistema de referencia en nuestra cabeza con la altura aumentando hacia arriba, entonces la aceleración en negativa y la ecuación de movimiento son

$$\begin{aligned} a(t) &= -g \\ v(t) &= v_o - g(t - t_o) \\ x(t) &= x_o + v_o(t - t_o) - \tfrac{g}{2}(t - t_o)^2 \end{aligned}$$

Tomemos el origen en nuestra cabeza $x_o = 0$ y $t_o = 0$, entonces la piedra alcanza la máxima altitud cuando $v(t_{max}) = 0$

$$t_{max} = \frac{-v_o}{-g} = 1s$$

y por lo tanto la altura máxima es

$$x(t_{max}) = 0 + 10(1) - \frac{10}{2}(1)^2 = 5m$$

El tiempo para subir debería ser el mismo que para bajar y por lo tanto tendría $t = 2$ segundos para moverme de mi posición. Esto lo podemos resolver matemáticamente de $x(t_c) = 0$, dando

$$x(t_c) = 10t_c - 5t_c^2 = t_c(10 - 5t_c) = 0 \qquad \begin{aligned} t_c &= 0s \\ t_c &= 10/5 = 2s \end{aligned}$$

Tenemos dos soluciones. Obviamente la primera solución es cuando partió la piedra hacia arriba, y la segunda cuando la piedra paso a la altura de mi cabeza. Cual es la velocidad en ese instante $v(t_c) = 10 - 10(2) = -10$ m/s. La misma velocidad de lanzamiento. El gráfico de la parábola se muestra en FIg. 15.

Para la situación de aceleración uniforme podemos encontrar una relación entre velocidad y distancia al resolver la ecuación de la velocidad por el tiempo

$$t - t_o = \frac{v(t) - v_o}{a_o} \qquad \rightarrow \qquad x(t) - x_o = \frac{v(t)^2 - v_o^2}{2a_o}$$

con esta relación podríamos haber encontrado la altura máxima buscando la altura $x(t)$ donde $v(t) = 0$,

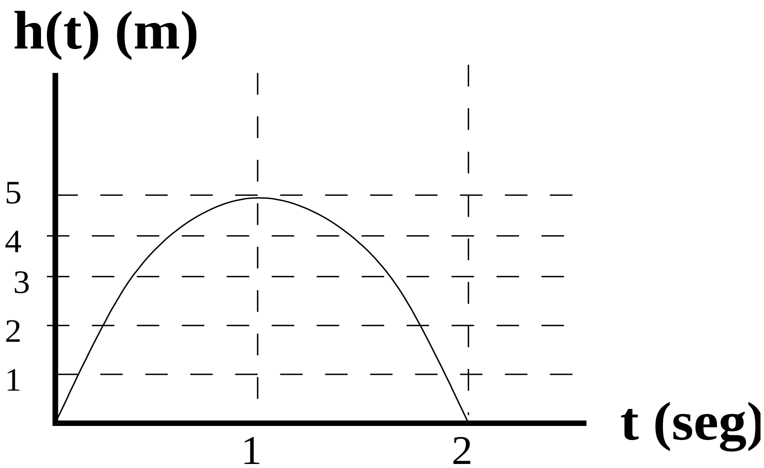

Figura 15: Altura vs tiempo de la piedra

$$x(t) = \frac{-v_o^2}{-2g} \sim 5m$$

Problema 6 Superman ve que un piano cae desde una altura de 100m. En ese instante parte a detener el piano con una velocidad de 10 m/s. A que altura encuentra el piano y que desaceleración necesita imponer sobre el piano para que llegue exactamente con velocidad cero al suelo. Grafique la trayectoria del piano.

La trayectoria del piano es

$$\begin{array}{lcl} v_p(t) = v_o - gt & \rightarrow & v(t) = -gt \\ x_p(t) = x_o + v_o t + \frac{g}{2}t^2 & \rightarrow & x(t) = h_o - \frac{g}{2}t^2 \end{array}$$

y la de Superman

$$\begin{array}{lcl} v_s(t) = v_o & \rightarrow & v(t) = v_{so} \\ x_s(t) = x_o + v_o t + \frac{g}{2}t^2 & \rightarrow & x(t) = v_{so}t \end{array}$$

Entonces el piano y Superman se encuentran en el instante

$$x_s(t_e) = x_p(t_s) \qquad \rightarrow \qquad v_{so}t = h_o - gt^2/2$$

La cual tiene dos soluciones

$$t_e = \frac{-v_{so} \pm \sqrt{v_{so}^2 + 2gh_o}}{g}$$

y por lo claramente necesitamos la solución $t_e = (-v_{so} + \sqrt{v_{so}^2 + 2gh_o})/g \sim 3{,}58$ s. Y se encuentran a una altura de $h_e = 35{,}8$ m. La velocidad del piano en ese instante es

$v_{pe}(t_e) = -gt_e = -35{,}8$ m/s. Ahora Superman tiene que imponer una aceleración al piano de

$$a = \frac{v^2 - v_o^2}{2(x_f - x_o)} = \frac{0 - v_{pe}^2}{-2h_e} = +17{,}9 \;\; m/s^2$$

El gráfico de $x(t)$ y $v(t)$ están en Fig. 16.

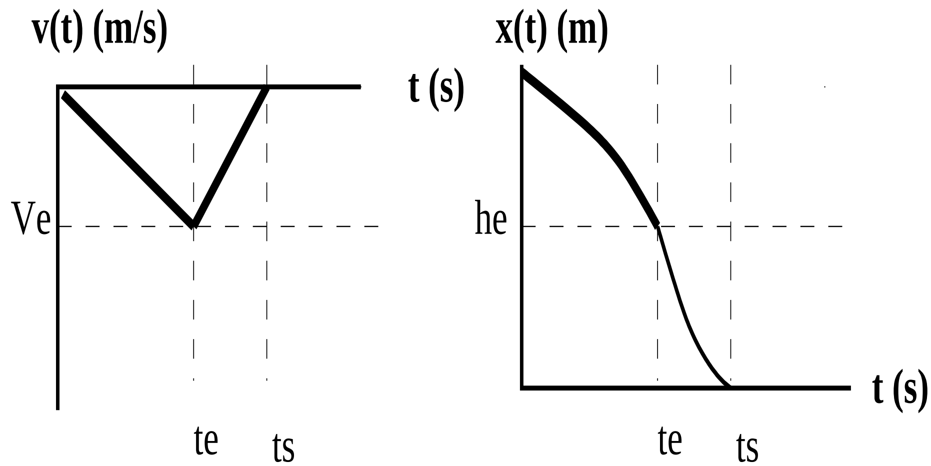

Figura 16: (a) velocidad y (b) posición del piano.

7. Velocidad relativa

Supongamos que tenemos un origen O y dos cuerpos A y B que se mueven con respecto a este origen con velocidades $v_{A,O}$ y $V_{B,O}$ respectivamente. Podemos calcular la velocidad relativa entre A y B , $v_{A,B}$, usando la relación

$$v_{A,O} = v_{A,B} + v_{B,O} \qquad \rightarrow \qquad v_{A,B} = v_{A,O} - v_{B,O}$$

Dada la velocidad relativa podemos encontrar la distancia relativa entre A y B como función del tiempo integrando esta expresión

$$x_{A,B}(t) - X_{A,B}(0) = [x_{A,O}(t) - X_{A,O}(0)] - [X_{B,O}(t) - X_{B,O}(0)]$$

que claramente satisface las condiciones iniciales. Esto se podría aplicar por ejemplo al problema de Superman arriba.

La posición del piano con respecto a Superman es (el suelo es el sistema 'o')

$$x_{p,o} = x_{p,s} + x_{s,o} \qquad \rightarrow \qquad x_{p,s} = x_{p,o} - x_{s,o}$$

Entonces tomando dos derivadas tenemos

$$a_{p,s} = a_{p,o} - a_{s,o} = -g - 0 = 0$$

Por lo tanto $v_{p,s} = v_{p,s}(0) - gt$ y también

$$\begin{aligned} x_{p,s}(t) &= x_{p,s}(0) + v_{p,s}(0)t - \tfrac{g}{2}t^2 \\ &= h_o + (0 - v_{s,o})t - \tfrac{g}{2}t^2 \end{aligned}$$

estamos interesados en el instante que $x_{p,s}(t_e) = 0$, que nos da

$$t_e = \frac{-v_{so} \pm \sqrt{v_{so}^2 + 2gh_o}}{g}$$

igual a lo que obtuvimos antes.

8. Apéndice I: Derivada de $f(ct)$.

Si $f(t) = g(ct)$ y si

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \qquad \rightarrow \qquad \frac{df(t)}{dt} = ch(ct)$$

Esto se prueba por fuerza bruta,

$$\begin{aligned} \tfrac{df(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{g[c(t+\Delta t)] - g(ct)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} c\tfrac{g[c(t+\Delta t)] - g(ct)}{c\Delta t} \end{aligned}$$

pero notemos que si $\Delta t \to 0$, también lo hace $c\Delta t \to 0$, por lo tanto puedo re-escribir lo de arriba como

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{c\Delta t \to 0} c\frac{g\left[c(t + \Delta t)\right] - g(ct)}{c\Delta t}$$

y podemos cambiar de variables $\tau = ct$ y $\Delta\tau = c\Delta t$, y podemos escribir

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta\tau \to 0} c\frac{g(\tau + \Delta\tau) - g(\tau)}{\Delta\tau} = ch(\tau)$$

9. Apéndice II: Derivada del producto:

Queremos probar que

$$\frac{f(t)g(t)}{dt} = g(t)\frac{df(t)}{dt} + f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

Para esto tomemos el limite

$$
\begin{aligned}
\frac{f(t)g(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t+\Delta t)g(t+\Delta t)-f(t)g(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{[f(t+\Delta t)g(t+\Delta t)-f(t)g(t+\Delta t)]-[f(t)g(t)-f(t)g(t+\Delta t)]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{g(t+\Delta t)[f(t+\Delta t)-f(t)]}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t)[g(t+\Delta t)-f(t)]}{\Delta t} \\
&= g(t)\lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} + f(t)\lim_{\Delta t\to 0} \frac{g(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \\
&= g(t)\frac{df(t)}{dt} + f(t)\frac{dg(t)}{dt}
\end{aligned}
$$

En el paso 2 sumamos y restamos $f(t)g(t+\Delta t)$. Del paso 3 al 4 usamos que cuando $\Delta t \to 0$, tenemos que $g(t+\Delta t) = g(t)$.

10. Apéndice III: Derivada de la cadena:

Queremos probar que si

$$
h[t] = \frac{df(t)}{dt} \qquad \to \qquad \frac{df[g(t]}{dt} = h[g(t)]\frac{dg(t)}{dt}
$$

Para esto tomemos el limite

$$
\begin{aligned}
\frac{df[g(t)]}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f[g(t+\Delta t)]-f[g(t)]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \left[\frac{f[g(t+\Delta t)]-f[g(t)]}{g(t+\Delta t)-g(t)}\right]\left[\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\right] \\
&= \left[\lim_{\Delta t\to 0} \frac{f[g(t+\Delta t)]-f[g(t)]}{g(t+\Delta t)-g(t)}\right]\left[\lim_{\Delta t\to 0} \frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\right] \\
&= h[g(t)]\frac{dg(t)}{dt}
\end{aligned}
$$

porque si $\Delta t \to 0$, también tenemos que $g(t+\Delta t) \to g(t)$. Esa es la definición de la derivada $h[t]$ de $f(t)$.