Capitulo 2: Movimientos en 2 y 3 dimensiones

Índice

ñ

1. Posicionamiento en mas de una dimensión

Nosotros sabemos que el viaje en carretera no es en 1-D, pero mas bien las carreteras tienen curvas. Entonces la pregunta es como caracterizamos la posición del auto en el tiempo y su desplazamiento entre dos intervalos de tiempo? Andamos buscando el equivalente de nuestro $x(t)$ y a nuestro Δx del Capitulo 1, pero en mas dimensiones.

La Fig. 1 muestra una "vista aérea" de la carretera en un gráfico x-y. Generalmente los mapas están orientados con el eje $\widehat{y}$ hacia el norte, pero no es necesario. En principio uno los puede orientar en cualquier dirección, pero cuando uno tomo la decisión, tiene que ser consistente hacia adelante.

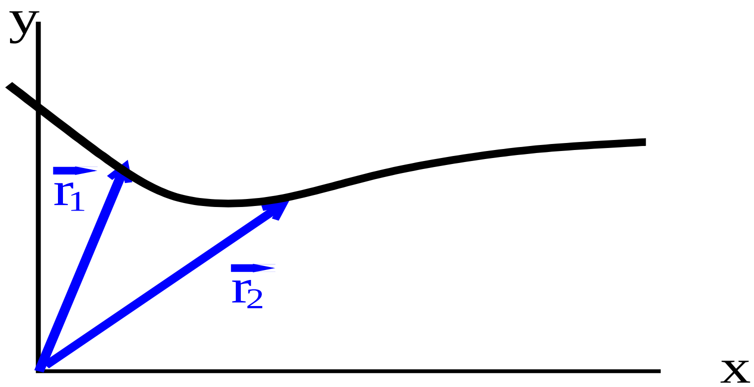

Figura 1: Posición del auto en una carretera en el plano x-y

Ahora, especifiquemos algunas ideas vagas con respecto a la Fig. 1:

1. No es suficiente dibujar la carretera para describir lo que esta haciendo el auto, necesitamos especificar donde esta en cada instante del tiempo t.

2. por lo tanto ahora un punto en nuestro gráfico representa la posición del auto en cierto instante del tiempo en este gráfico de dos dimensiones. Esto lo describimos como la posición $\vec{r}(t)$ que parte del origen de nuestro sistema de coordenadas. Este vector se dibuja como una flecha que parte desde el origen hasta el punto donde esta el auto en el instante t (ver Fig. 1).

3. Vamos a ir definiendo intuitivamente que es un vector, pero por ahora podemos decir que un vector es diferente a un escalar, que representa solo un numero, ej. el numero 5.

4. a medida que variamos t, los puntos definidos por $\vec{r}(t)$ definen una trayectoria. Esta curva es la carretera en el gráfico x-y (ver Fig. 1), donde los vectores $\vec{r}_1 = \vec{r}(t = t_1)$ y $\vec{r}_2 = \vec{r}(t = t_2)$ representan la posición del auto con respecto a nuestro origen en el instantes $t = t_1$ y $t = t_2$ respectivamente.

5. en principio la trayectoria no tiene por que se sobre la carretera, el auto podría haberse salido de la carretera, tomar un desvío, etc.

6. el origen fue fijado al comienzo del problema desde donde medimos la ubicación del auto en el tiempo. Es importante notar en $t = 0$ el auto no tiene por que estar en el origen. **Esto no es un gráfico de x vs t**

Ahora que ya sabemos describir la posición del auto en el instante t, estamos listos para definir, por lo menos gráficamente, el desplazamiento del auto entre dos instantes. El desplazamiento del auto desde el punto $\vec{r}(t = t_1)$ a el punto $\vec{r}(t = t_2)$ es intuitivamente lo que "recorrió" entre estos dos puntos, osea la flecha que parte del punto $\vec{r}(t = t_1)$ hasta el punto $\vec{r}(t = t_2)$, descrita por $\Delta\vec{r}$ en la Fig. 2.

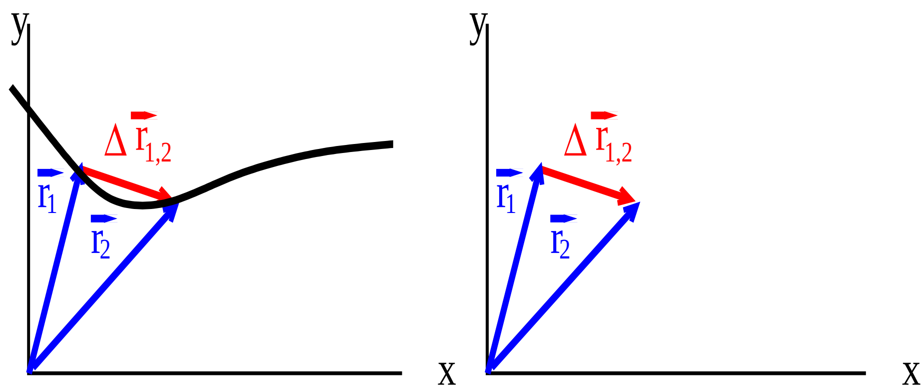

Figura 2: (a) Desplazamiento en la carretera entre los instantes t_1 y t_2. (b) La descripción en termino de la suma de vectores.

Ahora, especifiquemos algunas ideas vagas con respecto a la Fig. 2:

1. esto es exactamente lo que seria el desplazamiento si la carretera fuera en linea recta, osea en una dimensión.

2. el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ también en un vector pero que no parte del origen como la posición $x(t)$. Es importante notar que un vector se defino solo por su tamaño y su dirección, o ángulo, con respecto a algún eje. **Por ejemplo: el auto se desplazo 100km hacia el oeste**.

3. supongamos que tenemos el desplazamiento desde la posición $\vec{r}(t = t_1)$ a $\vec{r}(t = t_2)$, definido por el desplazamiento $\Delta\vec{r}_{1,2}$, y luego el desplazamiento desde la posición $\vec{r}(t = t_2)$ a $\vec{r}(t = t_3)$, definido por el desplazamiento $\Delta\vec{r}_{2,3}$. Ver Fig. 3a. Entonces el desplazamiento total es

$$\Delta\vec{r}_{1,3} = \Delta\vec{r}_{1,2} + \Delta\vec{r}_{2,3}$$

4. a el desplazamiento lo vamos a tratar como vector. Notemos que de alguna forma, hemos definido la idea de la suma de dos vectores (o flechas) como se muestra en la Fig. 3b donde $\vec{A}$ correspondería a $\Delta\vec{r}_{1,2}$, $\vec{B}$ correspondería a el desplazamiento $\Delta\vec{r}_{2,3}$, y $\vec{C}$ correspondería al desplazamiento total $\Delta\vec{r}_{1,3}$.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

como se muestra en la figura.

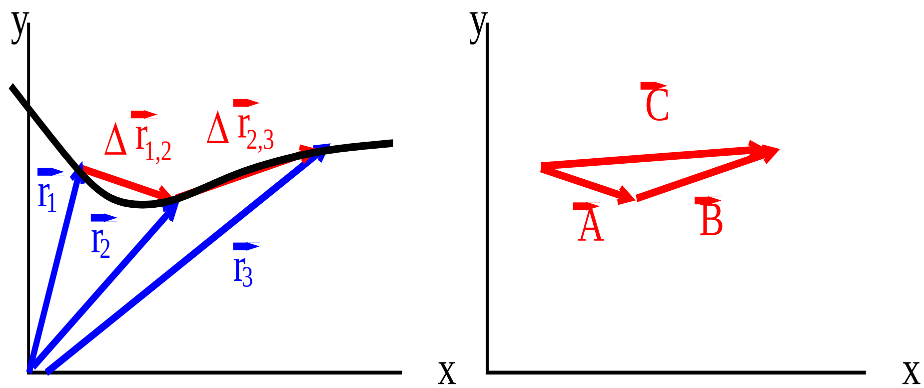

Figura 3: (a) Desplazamiento en la carretera entre los instantes t_1 a t_2, y entre t_2 a t_3. (b) Es desplazamiento total como suma vectoriales de desplazamientos parciales.

5. esto quiere decir que si un auto se desplaza $\vec{A}$, entonces luego de otro desplazamiento $\vec{B}$, genera un desplazamiento total $\vec{C}$. Esto define la suma de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Gráficamente, corresponde a poner la flecha $\vec{B}$ al final de la flecha $\vec{A}$ sin cambiar su orientación, como lo muestra la Fig. 4a. Si dibujamos el paralelogramo de la Fig. 4a, nos damos cuenta que sumar dos vectores puestos en el mismo origen nos da el resultado anterior, y además muestra que

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = \vec{C}$$

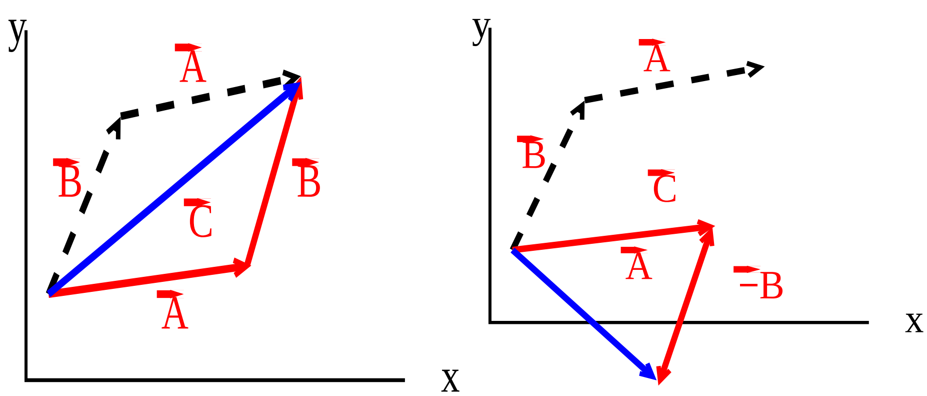

Figura 4: (a) La suma de dos vectores y el paralelogramo que forman. (b) Sustracción de dos vectores.

Ejemplo 1 Un auto parte del origen, y luego se desplaza por una hora hacia el norte a 100 km/hr y luego por una hora hacia el este a 50 km/hr. Cuanto se desplazo? Gráficamente nos damos cuenta que la magnitud del desplazamiento fue

$$|C|^2 = |A|^2 + |B|^2 = 100^2 + 50^2 \qquad\qquad |\vec{C}| = 111{,}8$$

pero aun nos falta especifica la dirección, la cual podemos definir en termino del ángulo con respecto al eje "este". Este ángulo

$$\tan\theta = \frac{|A|}{|B|} = 2 \qquad\qquad \theta = 63^o$$

Para el caso especial en el cual el ángulo no es 90^o, podemos usar la siguiente formula

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

que incluye trivialmente el caso de Pytagoras.

1.1. Propiedades de Vectores

Un vector son cantidades, como el desplazamiento, que están definidas por su magnitud y su dirección la cual puede ser definido como un ángulo con respecto a un eje.

Algunas propiedades son:

1. Multiplicar un vector $\vec{A}$ por un "escalar" c es naturalmente multiplicar la magnitud del vector por el escalar y mantener la dirección. Por lo tanto si $c > 0$ entonces $c\vec{A}$ es paralelo a $\vec{A}$. Si $c < 0$ entonces $c\vec{A}$ es antiparalelo a $\vec{A}$

2. de esta forma definimos la sustracción de vectores $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ como se muestra en la Fig. 4b.

1.2. Componentes de un Vector

Arriba vimos que la posición esta definida como un punto en el trafico de x-y, por lo tanto puede ser representado por un par de números. Esta es otra representación de un vector.

Por ejemplo, en el instante $t = 2$ horas, el auto esta en el punto $\vec{r}(t = 2) = (100, 50)$, como se muestra en la Fig. 5a. Esto quiere decir que el auto esta en el lugar a 100 km al este y a 50 km al norte del origen. También podríamos haber dicho que el auto esta a $|A| = \sqrt{100^2 + 50^2} = 111{,}8$ kms en la dirección definida por el ángulo θ con respecto al eje $\widehat{E}$. Por lo tanto, un par ordenado es también una buena representación de un vector, como lo es su magnitud y su ángulo de dirección.

De esta forma se dice que el vector tiene como componente $A_E = 100$ kms en la dirección $\widehat{E}$ y $A_N = 50$ km en la dirección $\widehat{N}$, los cuales podríamos haber encontrado como

$$\begin{aligned} A_E &= |A|\cos\theta \\ A_N &= |A|\sin\theta \end{aligned}$$

estos componentes pueden ser negativos, pero tenemos que se cuidadosos con la definición del ángulo θ.

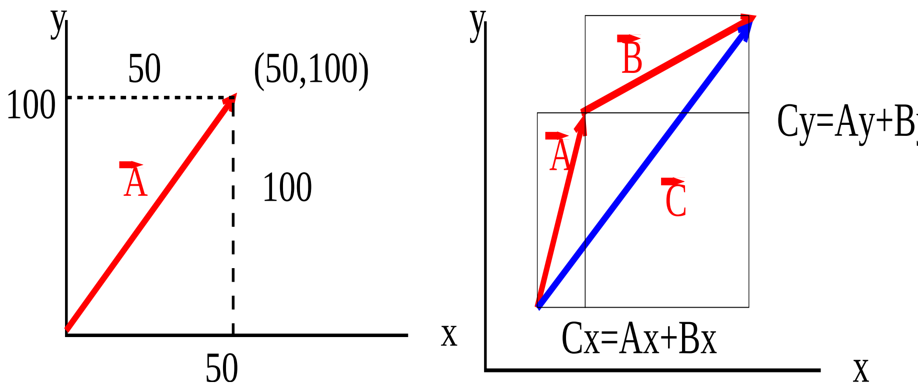

Figura 5: (a) Componentes de un vector (b) Suma de dos vectores por componentes.

1. Inmediatamente vemos que si multiplicamos un vector $\vec{A}$ por une escalar c tenemos que multiplicar los componentes por este escalar. Si el escalar es negativo, debemos multiplicar los componentes de este por este valor negativo, lo que efectivamente hace que $c\vec{A}$ sea antiparalelo a $\vec{A}$.

$$c\vec{A} = (cA_x, cA_y)$$

2. La suma de dos vectores se pude hacer muy fácilmente sumando los componentes de cada vector como se puede observar en la Fig. 5b. Así si $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$, lo componentes son

$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \end{aligned}$$

de los cuales se puede calcular $|C|$ y θ el ángulo de $\vec{C}$ con respecto al eje $\widehat{x}$.

Ejemplo 2: Supongamos que un conductor maneja por una carreta 100 km hacia el norte y luego 50 km hacia este por otra carretera, donde sufre un accidente. Al llamar al hospital necesita darle la forma de llegar al helicóptero, el cual puede andar a 300 km/hr. Cuanto tiempo se demoraría el helicóptero en buscar al accidentado y volver al hospital si (a) le decimos que recorra la misma ruta que el auto? (b) le decimos que siga el vector definido por esos componentes? En cual tiene mas probabilidad de salvarse?

Notemos: que lo mismo se puede hacer en 3 dimensiones, con los vectores ahora tendrían tres componentes. Esto implica que gráficamente un vector en 3-D esta definido por su magnitud y por los ángulos con respecto a dos ejes.

Un vector unitario se define como un vector de largo 1, entonces podemos convertir un vector $\vec{A}$ cualquiera en vector unitario con $\widehat{A} = \vec{A}/|A|$. Este vector esta en la dirección de $\vec{A}$ pero de magnitud $|\widehat{A}| = 1$. En particular están los vectores unitarios en las direcciones de los ejes, denominados como

$$\begin{aligned} \widehat{i} = \widehat{x} &= (1,0,0) \\ \widehat{j} = \widehat{y} &= (0,1,0) \\ \widehat{k} = \widehat{z} &= (0,0,1) \end{aligned}$$

Así, un vector en tres dimensiones $\vec{A} = A_x, A_y, A_z$ se puede también escribir como

$$\vec{A} = A_x\widehat{i} + A_y\widehat{j} + A_z\widehat{k}$$

y la multiplicación por un escalar es

$$c\vec{A} = cA_x\widehat{i} + cA_y\widehat{j} + cA_z\widehat{k}$$

y la suma $\vec{A} + \vec{B}$ como

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\widehat{i} + (A_y + B_y)\widehat{j} + (A_z + B_z)\widehat{k}$$

Entonces podemos hacer 3 descripciones de un vector

1. Descripción gráfica (flecha): Un vector esta representado por un tamaño y una dirección
2. Descripción en componentes: Un vector esta representado por una lista ordenada de números, que son sus componentes. En 2 dimensiones tenemos 2 componentes, en 3 dimensiones tenemos 3 componentes, y así sucesivamente

$$\vec{A} = [A_x, A_y]$$

3. Descripción con vectores unitarios: Un vector esta representado la suma vectorial de los componentes por el vector unitario correspondiente que representa al sistema de coordenadas

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

Es interesante hacer algunos comentarios, con

1. Las teorías modernas sugieren que el Universo deberla tener 11 dimensiones, aunque nosotros percibimos solo 4 (tiempo y 3 dimensiones espaciales). Las otras 7 dimensiones son difíciles de observar ya que están muy curvadas sobre si mismas

2. La relación

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\widehat{i}+(A_y+B_y)\widehat{j}+(A_z+B_z)\widehat{k}$$

no funciona en distancias muy grandes. Claro que para situaciones que se presentan en nuestra vida cotidiana es una excelente aproximación.

2. Desplazamiento, Velocidad y Aceleración

Ahora podemos describir una trayectoria

$$\vec{r}(t)=x(t)\widehat{i}+y(t)\widehat{j}+z(t)\widehat{k}$$

en base a sus componentes. Esto generalmente se gráfica haciendo una tabla de $x(t)$ y $y(t)$ para diferentes tiempos y uniendo los puntos. De la misma manera como lo hicimos en el capitulo anterior, podemos definir el desplazamiento promedio como

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$$

y por lo tanto la velocidad promedio como

$$\begin{aligned}\vec{v}_{av}(t,\Delta t) &= \tfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}\\ &= \left[\tfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right]\hat{i}+\left[\tfrac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\right]\hat{j}+\left[\tfrac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right]\hat{k}\\ &= v_{av,x}(t+\Delta t)\hat{i}+v_{av,y}(t+\Delta t)\hat{j}+v_{av,z}(t+\Delta t)\hat{k}\end{aligned}$$

La velocidad instantánea en el instante t es entonces

$$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_{av}(t,\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

lo que corresponde a la tangente de la curva generada por $\vec{r}(t)$ en el plano x-y en dos dimensiones, o en el espacio x-y-z en tres dimensiones. Ver Fig. 6a.

Dado que la suma o resta se puede hacer por componentes, entonces

$$\begin{aligned}\tfrac{d\vec{r}(t)}{dt} &= \tfrac{dx(t)}{dt}\widehat{i}+\tfrac{dy(t)}{dt}\widehat{j}+\tfrac{dz(t)}{dt}\widehat{k}\\ &= v_x(t)\hat{i}+v_y(t)\hat{j}+v_z(t)\hat{k}\end{aligned}$$

De la misma forma podemos definir la aceleración promedio como

$$\vec{a}_{av}(t,\Delta t)=\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

La velocidad instantánea en el instante t es entonces

$$\vec{a}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{a}_{av}(t,\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

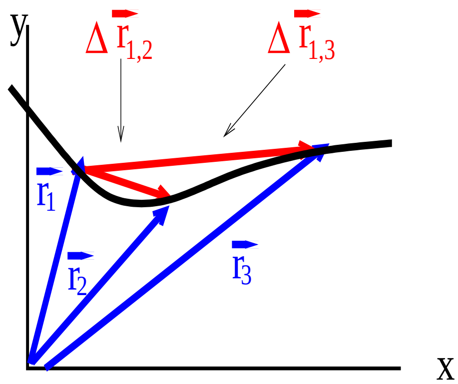

Figura 6: (a) Velocidad como la tangente a la trayectoria $\vec{r}(t)$ (b) Suma de dos vectores por componentes.

lo que corresponde a la tangente de la curva generada por $\vec{v}(t)$ en el plano x-y en dos dimensiones, o en el espacio x-y-z en tres dimensiones.

Dado que la suma o resta se puede hacer por componentes, entonces

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\widehat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\widehat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\widehat{k}$$

o en términos de $\vec{r}(t)$, tenemos

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\widehat{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\widehat{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\widehat{k}$$

Notemos: que cuando manejamos un auto nosotros controlamos la aceleración del auto. Por lo tanto lo general es que tengamos que integrar para encontrar la trayectoria del auto.

Notemos: para integrar la trayectoria del auto desde el vector de aceleración, solo tenemos que integrar cada componente por separado, así tenemos que si la aceleración es un vector constante en el tiempo

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{a}_o(t - t_o)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}_o(t - t_o)^2$$

donde las condiciones iniciales están dadas por lo vectores $\vec{x}_o$ y $\vec{v}_o$

Notemos: Para el caso general tenemos

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(\tau) d\tau = \left[v_{o,x} + \int_{t_o}^{t} \vec{a_x}(\tau) d\tau \right] \widehat{i} + \left[v_{o,y} + \int_{t_o}^{t} \vec{a_y}(\tau) d\tau \right] \widehat{j} + \left[v_{o,z} + \int_{t_o}^{t} \vec{a_z}(\tau) d\tau \right] \widehat{k}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \int_{t_o}^{t} \vec{v}(\tau) d\tau = \left[x_o + \int_{t_o}^{t} \vec{v_x}(\tau) d\tau \right] \widehat{i} + \left[y_o + \int_{t_o}^{t} \vec{v_y}(\tau) d\tau \right] \widehat{j} + \left[z_o + \int_{t_o}^{t} \vec{v_z}(\tau) d\tau \right] \widehat{k}$$

Ejemplo 3: Supongamos que tenemos el vector

$$\vec{r}(t) = [5 + 7t]\, \widehat{i} + \left[25 + 7t - 4{,}9t^2 \right] \widehat{j}$$

encuentre la velocidad y la aceleración. Que distancia se desplazo entre $t = 5$ a $t = 10$. Cual es el mayor valor de y que puede alcanzar esta trayectoria. Grafique el gráfico de posición, velocidad y aceleración.
La velocidad y aceleración son:

$$\vec{v}(t) = [7]\, \widehat{i} + [7 - 9{,}8t]\, \widehat{j}$$

$$\vec{a}(t) = -9{,}8t\widehat{j}$$

El mayor valor de y se da cuando el componente de la velocidad $v_y = 0$, lo que sucede en $t_m = 7/9{,}8$. Por lo tanto el valor mayor de y es $y(t_m) = 25 + 7t_m - 4{,}9t_m^2 = 32{,}5$. El gráfico se observa en la Fig. 7a-b

Ejemplo 4: Supongamos que tenemos la aceleración

$$\vec{a}(t) = [5 + t]\, \widehat{i} + [3]\, \widehat{j}$$

encuentre la velocidad y la posición, asumiendo que $\vec{r}(0) = \hat{i} + 3\hat{j}$ y $\vec{v}(0) = -2\hat{j}$. Que distancia se desplazo entre $t = 1$ a $t = 2$. Grafique el gráfico de posición, velocidad.
La velocidad se puede encontrar integrando

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \vec{v_o} + \textstyle\int_{t_o}^{t} \vec{a}(\tau) d\tau \\
&= -2\hat{j} + \left[\textstyle\int_{t_o}^{t} (5 + \tau) d\tau \right] \hat{i} + \left[\textstyle\int_{t_o}^{t} (5) d\tau \right] \hat{j} \\
&= \left[-5t + \tfrac{1}{2}t^2 \right] \hat{i} + [-2 + 3t]\, \hat{j}
\end{aligned}$$

y la posición

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \vec{r_o} + \textstyle\int_{t_o}^{t} \vec{v}(\tau) d\tau \\
&= \left[\hat{i} + 3\hat{j} \right] + \left[\textstyle\int_{t_o}^{t} (-5\tau + \tfrac{1}{2}\tau^2) d\tau \right] \hat{i} + \left[\textstyle\int_{t_o}^{t} (-2 + 3\tau) d\tau \right] \hat{j} \\
&= \left[1 + \tfrac{5}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 \right] \hat{i} + \left[3 - 2t + \tfrac{3}{2}t^2 \right] \hat{j}
\end{aligned}$$

Los gráficos se muestran en la Fig. 7c-d.

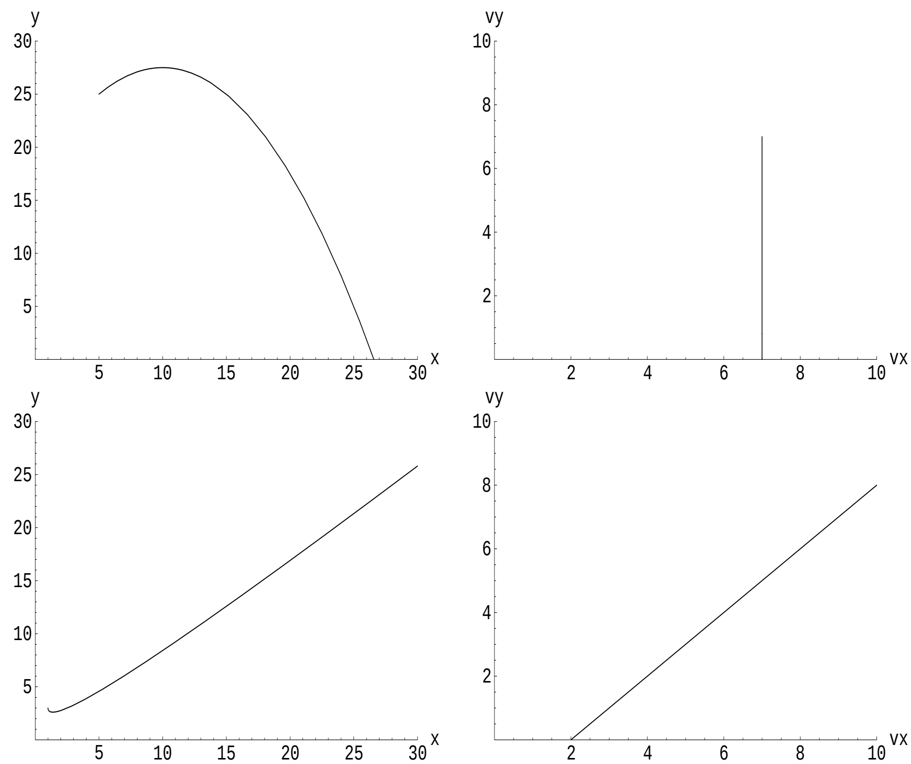

Figura 7: (a) posición y (b) velocidad del problema 3. (c) posición y (d) velocidad del problema 4

2.1. Movimiento de proyectiles

Cualquier movimiento en dos dimensiones con la fuerza de gravedad cerca de la tierra se puede describir a partir de

$$
\begin{aligned}
a_x &= 0 \\
a_y &= -g
\end{aligned}
$$

con lo cual las ecuaciones de movimiento son

$$
\begin{aligned}
a_x &= 0 \\
a_y &= -g
\end{aligned}
$$

Si lanzamos un proyectil desde un cañón en un ángulo θ desde el suelo como se muestra en la Fig. 8a, tenemos (con $t_o = 0$) que

$$
\begin{aligned}
x_o &= 0 \\
y_o &= 0 \\
v_{x,o} &= v_o \cos\theta \\
v_{y,o} &= v_o \sin\theta
\end{aligned}
$$

y por lo tanto las ecuaciones de movimiento para este caso particular son

$$
\begin{aligned}
v_x(t) &= v_{x,o} \\
x(t) &= v_o t \cos\theta \\
v_y(t) &= v_{y,o} - gt \\
y(t) &= v_o t \cos\theta - \tfrac{g}{2} t^2
\end{aligned}
$$

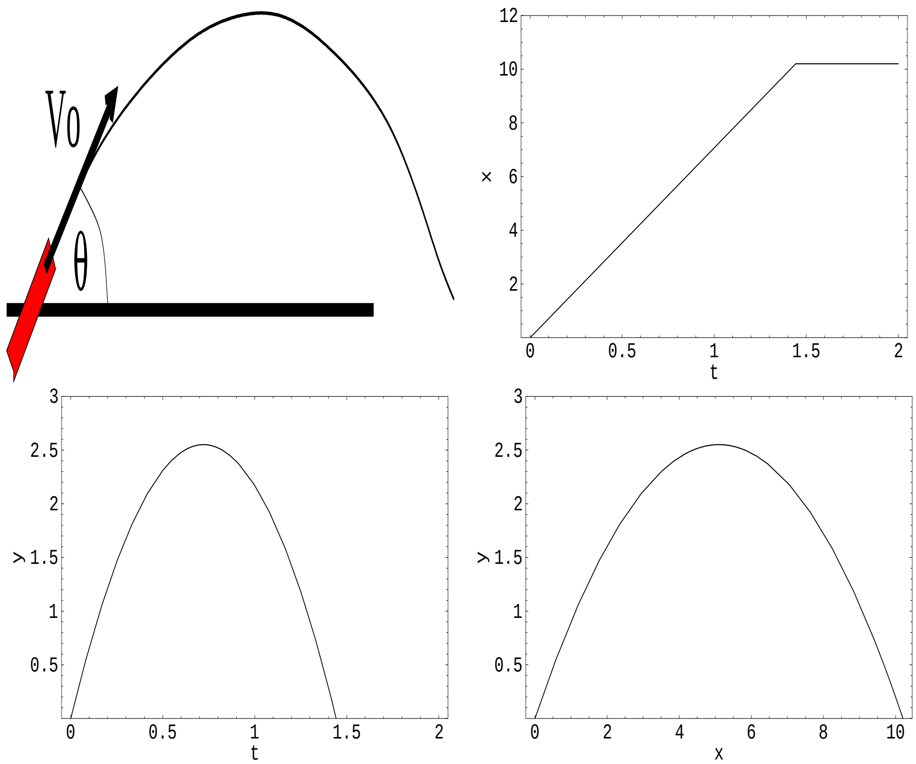

Figura 8: (a) Diagrama del disparo de cañón. (b) x(t). (c) y(t). (d) x(t) vs y(t)

Encontremos el ángulo óptimo, entre 0 y 90^o para mandar el cañonazo. Para esto necesitamos encontrar el valor de $x(t_s)$ cuando la bala de cañón vuelve al suelo, $y(t_e) = 0$. De esta ultima ecuación podemos resolver por t_e.

$$
y(t_e) = v_o t_e \sin\theta - \frac{g}{2} t_e^2 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad t_e \left[v_o \sin\theta - \frac{g}{2} t_e \right]
$$

la cual tiene dos soluciones. La solución obvia $t_e = 0$ y la solución que nos interesa,

$$
t_e = \frac{2 v_o \sin\theta}{g}
$$

con la cual obtenemos

$$
R(\theta) = x(t_e) = \frac{2 v_o^2}{g} \sin\theta \cos\theta = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\theta
$$

Aquí tenemos dos posibilidades. Una es buscar el máximo de la función en forma analítica

$$R(\theta) = sin(2\theta) \qquad \frac{dR(\theta)}{d\theta} = 0 \qquad \theta_{max} = 45^o$$

o graficar $\sin\theta\cos\theta$ y darse cuenta que el máximo valor de la función para θ entre 0 y 90^o es para $\theta = 45^o$.

Si queremos graficar la trayectoria óptima, con $\theta = 45^o$, entonces tenemos que encontrar la altura máxima, la cual se obtiene cuando $v_y = 0$,

$$\Delta y = h_{max} = \frac{v_y^2 - v_{y,o}^2}{-2g} = \frac{v_o^2 \sin\theta^2}{2g} = \frac{v_o^2}{4g}$$

esto se da porque tenemos un movimiento uniformemente acelerado en y. También lo podríamos haber resuelto evaluando en $h = y(t_e/2)$. Esto sucede exactamente cuando $x = x(t_e)/2$. Mirar Fig. 8b-d para el caso $v_o = 10$ m/s.

Problema 5: Supongamos que trabajamos para las naciones unidas y que tenemos que dejarles caer alimentos a unos sobrevivientes en una isla rodeada de tiburones. Esta isla tiene un largo de $L = 100$ m. El avión viaja a $v_a = 100$ m/s a una altura de $h_o = 100$ m. A que distancia de la isla les tengo que dejar caer la comida y cual es el error en tiempo que me puedo permitir.

Primero tenemos que escribir las ecuaciones de movimiento, tomando el origen en el suelo desde el momento que dejo caer los alimentos, por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} v_x(t) & = & v_a \\ x(t) & = & v_a t \\ v_y(t) & = & -gt \\ y(t) & = & h_o - \frac{g}{2}t^2 \end{array}$$

por lo tanto los alimentos llegan a la tierra, $y(t_s) = 0$ en el instante

$$y(t) = h_o - \frac{g}{2}t_s^2 = 0 \qquad\qquad t_s = \sqrt{\frac{2h_o}{g}}$$

La solución positiva es la que me interesa. Por lo tanto si la suelto en el instante t_e el paquete recorre en el eje x, la distancia

$$x(t_e) = v_o\sqrt{\frac{2h_o}{g}}$$

esto implica que la tengo que soltar $t_e = 4{,}47$ segundos antes de pasar sobre la isla. Como la velocidad es constante en x, esto quiere decir que $\Delta x = v_a \Delta t$, entonces el error que me puede permitir es

$$\Delta t = \frac{L}{v_a} = 1s$$

Pregunta: Que pasa con la fricción del aire?

2.2. Movimiento circular con rapidez uniforme

Sabemos que la velocidad de una trayectoria es tangente al camino $\vec{r}(t)$, por lo tanto en una trayectoria circular con rapidez uniforme tenemos que aproximadamente, la aceleración deberla apuntar hacia el centro, como lo demuestra Fig. 9a-b. Es posible demostrar utilizando triángulos similares como se muestra en la Fig. 9c que

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta\vec{r}|} \sim \frac{|\vec{v}|}{|\vec{r}|}$$

lo cual es exacto en el limite $\Delta t \to 0$. De esta expresión se puede obtener

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{|\vec{v}|}{|\vec{r}|}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

porque la rapidez v es constante por definición.

La forma de hacer esto en forma matemática de trabajar este problema es primero notando que:

Teorema: si $f(t) = g(ct)$ y si

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \qquad \to \qquad \frac{df(t)}{dt} = ch(ct)$$

Esto se prueba por fuerza bruta,

$$\begin{aligned} \tfrac{df(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0} \tfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \tfrac{g[c(t+\Delta t)]-g(ct)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} c\tfrac{g[c(t+\Delta t)]-g(ct)}{c\Delta t} \end{aligned}$$

Con la definición de $\tau = ct$ y $\Delta\tau = c\Delta t$ y notando que si $\Delta t \to 0$, también lo hace $\Delta\tau \to 0$, por lo tanto podemos re-escribir lo de arriba como

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta\tau\to 0} c\frac{g\left(\tau+\Delta\tau\right)-g(\tau)}{\Delta\tau}$$

Con lo cual

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta\tau\to 0} c\frac{g(\tau+\Delta\tau)-g(\tau)}{\Delta\tau} = ch(\tau) = ch(ct)$$

Con lo cual podemos usar

$$\begin{array}{rclcrcl} \frac{d}{dt}\left(\cos(t)\right) & = & -\sin(t) & \qquad & \frac{d}{dt}\left(\cos(\omega t)\right) & = & -\omega\sin(\omega t) \\ \frac{d}{dt}\left(\sin(t)\right) & = & \cos(t) & & \frac{d}{dt}\left(\sin(\omega t)\right) & = & \omega\cos(\omega t) \end{array}$$

Podemos escribir la posición del cuerpo en el movimiento circular con rapidez angular constante como:

$$\vec{r}(t) = r_o\cos(\omega t)\widehat{i} + r_o\sin(\omega t)\widehat{j}$$

donde el ángulo es $\theta(t) = \omega t$, con ω constante. Pretendemos encontrar la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$. Notemos que la velocidad angular ω esta relacionado con el periodo P, como

$$\omega P = 2\pi \qquad \rightarrow \qquad P = \frac{2\pi}{\omega}$$

La velocidad se puede calcular como (con ω constante)

$$\vec{v}(t) = -r_o\omega\sin(\omega t)\widehat{i} + r_o\omega\cos(\omega t)\widehat{j}$$

Es útil definir los vectores unitarios radiales $\hat{r}$ y tangenciales $\hat{t}$ respectivamente

$$\begin{array}{rcl} \widehat{r} & = & \cos\theta\widehat{i} + \sin\theta\widehat{j} \\ \widehat{t} & = & -\sin\theta\widehat{i} + \cos\theta\widehat{j} \end{array}$$

con lo cual tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}(t) & = & r_o\hat{r} \\ \vec{v}(t) & = & r_o\omega\hat{t} \end{array}$$

y por lo tanto la velocidad es tangente al circulo y con magnitud constante

$$v = |\vec{v}| = \omega r_o$$

La aceleración instantánea es

$$\vec{a}(t) = -r_o^2\omega\cos(\omega t)\widehat{i} - r_o\omega^2\sin(\omega t)\widehat{j} = -\omega^2 r_o\hat{r}$$

por lo tanto la aceleración siempre apunta hacia el centro y tiene la magnitud constante

$$a_c = |\vec{a}| = \frac{v^2}{r_o} = r_o\omega^2$$

como se ve en la Fig. 9. Esta aceleración se llama aceleración centrípeta.

En el caso de que el movimiento es circular, pero tenemos aceleración tangente (esto lo haremos con mas cuidado mas adelante), entonces la velocidad instantánea esta dada por

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{r}\hat{r}$$

con un componente tangencial a la curva y un componente radial. La dirección radial es localmente perpendicular a la dirección tangente. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$ están graficados en el mismo gráfico de $\vec{r}(t)$ en la Fig. 9d.

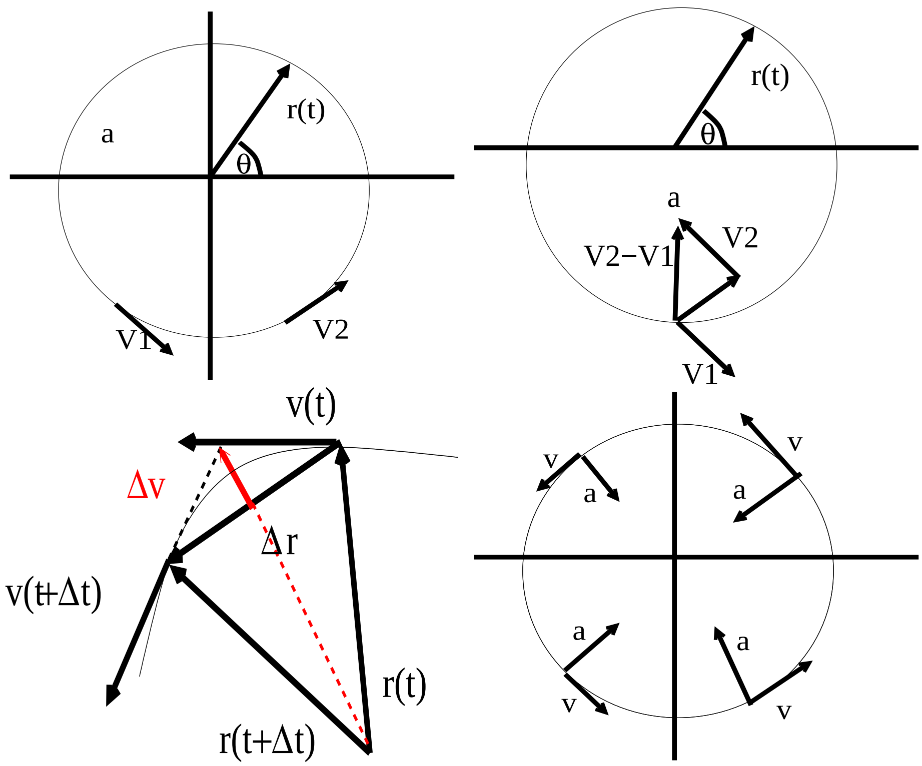

Figura 9: (a) Diagrama de movimiento circular. (b) Prueba gráfica que la aceleración en central. (c) Demostración gráfica para la magnitud de la aceleración. (d) Diagrama de la trayectoria.

Problema 5: La tierra que tiene un radio de $r_o = 6300$ km da vueltas sobre su eje de rotación con un periodo de un día. Cual es la magnitud de la velocidad y la aceleración.

En este caso tenemos que

$$\omega = 0{,}26\,\frac{1}{hr} \;=\; 7{,}27 \times 10^{-5}\frac{1}{s}$$

Por lo tanto podemos encontrar que

$$v = r_o\omega = 1649\, km/hr \;= 458\, m/s$$

y

$$v = r_o\omega^2 = 431\; km/hr^2 \;= 0{,}03\; m/s^2$$

para que este cuerpo se mantenga en el circulo y no salga volando en linea recta a una velocidad de 1600 km/hr, debe de haber una aceleración (y una fuerza) que lo mantenga sobre el circulo. Esta es la aceleración de gravedad (fuerza de gravedad). Dado que $g = 9{,}8$ m/s^2, la aceleración de gravedad es mas que suficiente para mantener al cuerpo moviéndose en un circulo. Si en alguna situación $a_c > g$, entonces el cuerpo se desarmaría, dado que los cuerpos astrofísicos son solo una agregación de material, y la aceleración de gravedad no seria suficiente para mantener el cuerpo en un circulo.

2.3. Velocidad Relativa

Supongamos que tenemos movimientos relativos de dos cuerpos. Por ejemplo un cuerpo se mueve con velocidad $\vec{v}_{A,O}$ y otro cuerpo se mueve con velocidad $\vec{v}_{B,A}$con respecto a este cuerpo, entonces la velocidad del cuerpo B con respecto al origen es

$$\vec{v}_{B,O} = \vec{v}_{B,A} + \vec{v}_{A,O}$$

Ejemplo 4: Supongamos que un barco quiere cruzar un río de ancho 1km, donde el agua fluye a una velocidad de $|v_r| = 1$ m/s. Si el barco se mueve a una velocidad de $|V_b| = 2$ m/s con respecto al agua del río, a que ángulo θ debería apuntar el barco con respecto a la orilla para cruzar en linea recta. Cuanto tiempo se demora en cruzar? Orientemos nuestro origen de tal forma que el agua fluye en el eje y y el ángulo θ lo medimos con respecto al eje x. Entonces el barco se mueve con respecto a la tierra

$$\vec{v}_{B,T} = \vec{v}_{B,A} + \vec{v}_{A,T} = \left[v_b \cos\theta\widehat{i} + v_b \sin\theta\widehat{j} \right] + \left[v_r\widehat{j} \right]$$

osea si no queremos que el barco se mueva en el eje y, necesitamos que el componente de $\vec{v}_{B,T}$ sea cero.

$$v_b \sin\theta + v_r = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sin\theta = -v_r/v_b \qquad \rightarrow \qquad \theta_c = 30^o$$

y por lo tanto dado que

$$\vec{r}_{B,T}(t) = v_b t \cos\theta_c\widehat{i}$$

tenemos que se demora

$$t_d = \frac{L}{v_b \cos\theta_c} = 577\; s$$

segundos. Ver Fig. 10.

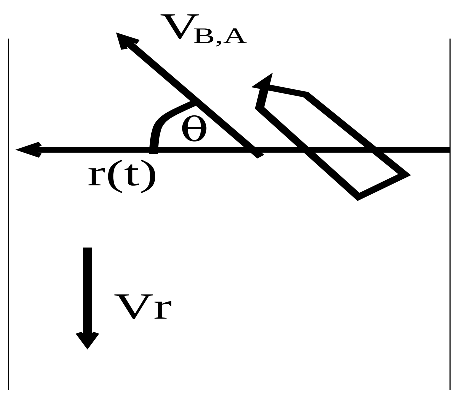

Figura 10: (a) Movimiento del barco