Capitulo 3: Leyes de Newton

Índice

En los capítulos anteriores discutimos la cinemática, pero también nos dimos cuenta que

cuando manejamos un auto controlamos la aceleración

por lo tanto es natural describir las leyes de movimiento en relación a la aceleración. Esto es una observación que tomo 2 mil años en tomar forma y el gran aporte de Newton, fue relacionar la aceleración con las Fuerzas.

1. Las 3 leyes de Newton

Las leyes de Newton se dan en sistemas de referencia inerciales.

Primera Ley de Newton: Principio de Inercia Un objeto continua moviéndose con velocidad constante a menos que actúe una fuerza externa. Si el objeto esta en reposo, continuara en reposo a menos que actúe una fuerza externa.

Segunda Ley de Newton: Principio de fuerzas y masas La aceleración, como vector, de un objeto es proporcional a la fuerza total que actúa sobre el objeto. La constante de proporcionalidad es la masa,

$$m\vec{a} = \vec{F}_{net} = \sum \vec{F}$$

Tercera Ley de Newton: Principio de acción y reacción Si un cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{A,B}$ sobre un cuerpo B, entonces el cuerpo B ejerce una fuerza $\vec{F}_{B,A}$ opuesta y de igual magnitud sobre el cuerpo A.

$$\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A}$$

2. Primera Ley de Newton: Principio de Inercia

Un objeto continua moviéndose con velocidad constante a menos que actúe una fuerza externa. Si el objeto esta en reposo, continuara en reposo a menos que actúe una fuerza externa.

Empujemos, por ejemplo, un pedazo de hielo sobre una superficie liza. La pregunta es que le pasa al pedazo de hielo luego de dejar de empujar?
Antes de Galileo y Newton: se pensaba que para que un cuerpo se mantuviera moviendo, se necesitaba que se siguiera ejerciendo una fuerza. De alguna manera intuitiva podríamos modelar esta idea como que la velocidad es proporcional a la fuerza,

$$\vec{v} = \alpha\vec{F}$$

por lo tanto el pedazo de hielo debería detenerse inmediatamente al dejar de empujar. Sabemos que esto no pasa, y que el pedazo de hielo luego de ser empujado se deslizara sobre la superficie por una buena distancia.
Galileo y Newton: Galileo, y luego Newton, reconocieron que existía una fuerza de fricción que frenaba el movimiento del pedazo de hielo. Esta fuerza de fricción de alguna manera fue lo que despisto a los investigadores anteriores. Las observaciones mas importantes son que

1. Si la fricción es reducida, entonces la desaceleración es también reducida
2. Galileo argumento que si pudiéramos remover todas las fuerzas, incluyendo la fricción, entonces la velocidad de un objeto nunca cambiaría. Esta es una propiedad de la materia que se le denomina **inercia**

Newton utilizo estas observaciones al establecer su primera ley de la dinámica.

Es importante notar que en el enunciado de Galileo existe la posibilidad de que la velocidad del objeto sea cero. Pero la velocidad de un objeto depende del sistema de referencia que estemos usando, por ejemplo vimos anteriormente como se relaciona la velocidad en diferentes sistemas de referencia

$$\vec{v}_{a,c} = \vec{v}_{a,b} + \vec{v}_{b,c}$$

por lo tanto tenemos que notar que este principio tiene sentido en ciertos sistemas de referencia que los llamaremos iniciales. Es mas el principio de inercia define cuales son los **sistemas de referencia inerciales**.

Esto es importante. Supongamos que tenemos dos personas, un observador O en la calle y un pasajero P viajando en el autobús. Si el conductor presiona el freno los dos observadores dirán lo siguiente

1. **El Pasajero:** dice que "siente" una aceleración hacia adelante del bus, aunque sabe que no hay ninguna fuerza actuando sobre el.
2. **El Observador:** observa que el bus frena y el pasajero sigue su curso como predice la 1ra ley de Newton.

Estas dos descripciones del mismo evento, demuestra que hay sistemas donde el principio de inercia no se da.

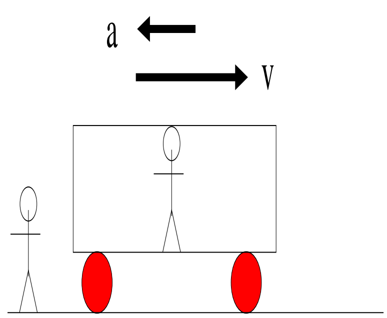

Figura 1: Problema de Bus

La única diferencia entre estas dos personas es que el pasajero esta en un sistema de referencia acelerado y por lo tanto no es un sistema de referencia donde se de la 1ra ley, osea, no es un **sistema**

de referencia inercial. En el sistema del observador el objeto (en este caso el pasajero) no cambio su velocidad cuando no habían fuerzas, y por lo tanto cumplió la 1ra ley. Este seria un **sistema de referencia inercial**.

Si no actúan fuerzas reales sobre el pasajero entonces

$$\frac{d\vec{v}_{p,s}}{dt} = 0$$

Mirando la definición de la velocidades relativas, tenemos que

$$\frac{d\vec{v}_{p,s}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{p,b}}{dt} + \frac{\vec{v}_{b,s}}{dt} = 0$$

con

$\vec{v}_{p,s}$	pasajero con respecto al suelo
$\vec{v}_{p,b}$	pasajero con respecto al bus
$\vec{v}_{b,s}$	bus con respecto al suelo

Por lo tanto el pasajero con respecto al bus tiene

$$\frac{d\vec{v}_{p,b}}{dt} = -\frac{\vec{v}_{b,s}}{dt}$$

Cuando el bus se mueve con velocidad constante, entonces el pasajero se mueve con velocidad constante y por lo tanto el bus es un **sistema inercial**. Pero todo cambia mientras el bus frena, ya que entonces que el pasajero con respecto al bus "siente" una aceleración hacia adelante con respecto al bus (recordemos que la aceleración del bus con respecto al suelo es negativa).

Entonces los **sistemas de referencia inercial** tiene las siguientes propiedades:

1. De alguna manera la 1ra ley de Newton define los **sistemas de referencia inerciales**,
2. en un **sistema de referencia inercial** la velocidad del objeto se mantiene constante si no hay fuerzas actuando sobre el
3. si no actúan fuerzas sobre un objeto, cualquier sistema de referencia donde la velocidad se mantenga constante es un **sistema inercial**.
4. todo sistema de referencia que se mueve con velocidad constante respecto a un **sistema de referencia inercial** es inercial.
5. un sistema de referencia que acelera con respecto a un sistema inercial no es inercial
6. La definición de un sistema de referencia inercial es **circular**
7. Las otras leyes de Newton están definidas solo en sistemas de referencia inerciales

8. La fuerza que '"siente" el pasajero es llamada una fuerza **ficticia**, ya que tiene una aceleración en el sistema de referencia del bus, pero esta fuerza no es real. Las **fuerzas ficticias** no son fuerzas realmente, pero son efectos aparentes en sistemas de referencias no-inerciales.

   - Otro ejemplo interesante es cuando estamos dando vueltas en circulo. En este caso claramente el observador dando vuelta "siente" la llamada **fuerza centrifuga** la cual no es una fuerza real, sino mas bien una fuerza ficticia dado que el observador esta en un sistema acelerado (en movimiento rotatorio y por lo tanto acelerado) y por lo tanto no-inercial. Un observador en un sistema inercial vería que el cuerpo en movimiento rotatorio esta siendo acelerado hacia el centro, y que el efecto que "siente" el observador dando vueltas es simplemente un efecto ficticio sobre su inercia.
   - la tierra gira alrededor de su eje, y por lo tanto no es un sistema inercial, pero esta aceleración es del orden de 0.03 m/s^2. Si estamos tratando situaciones relacionadas con el movimiento cerca de la tierra, la fuerza de gravedad es mucho mas relevante ya que $g = 9{,}8\ m/s^2$. Entonces como buena aproximación, podemos suponer que la tierra es un buen sistema inercial.
   - Claro que hay que tener cuidado, por ejemplo los **Huracanes** (cuya extensión es grande) están relacionados con el hecho que la tierra es un sistema no-inercial. Aquí tenemos un ejemplo donde las fuerzas ficticias pueden producir efectos importantes.

3. Segunda Ley de Newton: Principio de fuerzas y masas

La aceleración, como vector, de un objeto es proporcional a la fuerza total que actúa sobre el objeto. La constante de proporcionalidad es la masa,

$$m\vec{a} = \vec{F}_{net} = \sum \vec{F}$$

La segunda ley de Newton, establece que las fuerzas son *influencias externas* que aceleran los cuerpos en un **sistema de referencia inercial**. La misma fuerza produce diferentes aceleraciones en diferentes cuerpos, en relación a la masa de los cuerpos. Por lo tanto, la masa esta relacionada con la **inercia** del cuerpo, en que mientras mas masa, mas difícil es cambiar la velocidad del cuerpo.

1. las fuerzas se pueden comparar usando resortes, o elásticos iguales, y la aceleración es en la dirección de la fuerza

2. la masa es una característica fundamental que describe a un cuerpo. Esta propiedad intrínseca tiene el mismo valor en la tierra, luna, espacio vacío, etc.

3. notemos que este concepto es bastante intuitivo. El mismo motor produce diferentes aceleraciones en una moto o en un camión.

4. si las masas se miden en kg y las aceleraciones en m/s^2 entonces las fuerzas se miden en Newtons, 1 N= $kgms^{-2}$.

Problema: supongamos que tenemos un cuerpo de masa $m = 3$ kgs que se desplaza con una velocidad constante de $\vec{v} = 12\hat{i} + 3\hat{j}$. En el instante $t = 0$ aplicamos dos fuerzas $\vec{F}_1 = 8\hat{i} - 30\hat{j}$ N y $\vec{F}_2 = 7\hat{i} + 3\hat{j}$ N que actúan sobre esta masa durante 2 segundos. Grafique el vector posición y el de velocidad.
La fuerza total es de

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -15\hat{i} - 27\hat{j}\ N$$

por lo tanto su aceleración es constante e igual a

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}_{net} = -5\hat{i} - 9\hat{j}\ m/s^2$$

Por lo tanto, usando

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}_o + \vec{a}t = [12 - 5t]\,\hat{i} + [-3 - 9t]\,\hat{j} \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \tfrac{\vec{a}}{2}t^2 = \left[0 + 12t - \tfrac{5}{2}t^2\right]\hat{i} + \left[-3t + \tfrac{9}{2}t^2\right]\hat{j} \end{aligned}$$

en el intervalo $0 \leq t \leq 2$. Por lo tanto tenemos en particular

$$\begin{aligned} \vec{v}(2) &= 2\hat{i} - 13\hat{j} \\ \vec{r}(2) &= 12\hat{i} - 12\hat{j} \end{aligned}$$

Para $t > 2$ la fuerza y l aceleración es cero y por lo tanto el cuerpo se mueve con velocidad $\vec{v}(t = 2)$. Entonces

$$\vec{v}(t) = \left[\begin{array}{ll} 12\hat{i} + 3\hat{j} & t \leq 0 \\ (12 - 5t)\hat{i} + (3 - 4{,}5t)\hat{j} & 0 \leq t \leq 2 \\ 2\hat{i} - 13\hat{j} & t \geq 2 \end{array} \right.$$

$$\vec{r}(t) = \left[\begin{array}{ll} 12t\hat{i} + 3t\hat{j} & t \leq 0 \\ (12t - 2{,}5t^2)\hat{i} + (3t - 4{,}5t^2)\hat{j} & 0 \leq t \leq 2 \\ (12 + 2(t - 2))\hat{i} + (-12 - 13(t - 2))\hat{j} & t \geq 2 \end{array} \right.$$

Los gráficos se muestran en la Fig. 2a-b.

Problema: Supongamos que nos gustaría estimar la magnitud de la fuerza que mantiene a la tierra girando alrededor del sol. Dado que la tierra gira, aproximadamente, en un circulo con rapidez constante, tenemos que la aceleración y por lo tanto la fuerza de atracción apuntan en la

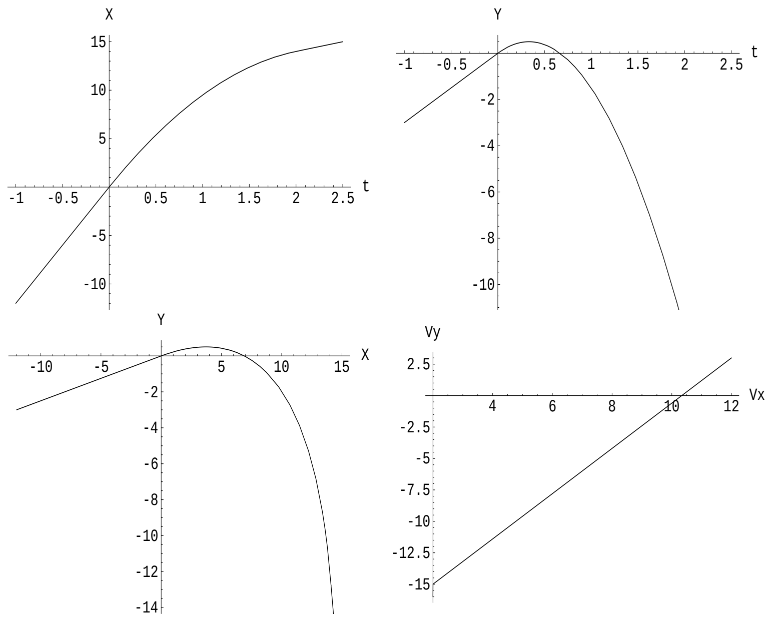

Figura 2: (a) x(t),(b) y(t), (c) posición x(t) vs. y(t), (d) velocidad v_x vs. v_y.

dirección del sol (mas adelante veremos que esto no es exactamente verdad), quien es probablemente el causante del movimiento de la tierra. La aceleración centrípeta es

$$|\vec{a}| = \omega^2 |\vec{r}| \qquad \rightarrow \qquad |\vec{F}| = m_T \omega^2 |\vec{r}|$$

Podemos estimar esta fuerza dado que la distancia del sol a la tierra es 8 min-luz $= 8 \times 60 \times 300000$ km $= 1{,}44 \times 10^{11}$ m, y dado que la tierra se demora $T = 1$ año $= 3600 \times 24 \times 365 = 3{,}15 \times 10^7$ en dar la vuelta alrededor del sol, con lo cual

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2 \times 10^{-7} s^{-1}$$

Dado que la masa de la tierra es $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kgs, tenemos que la fuerza de atracción entre la tierra y el sol es $|\vec{F}| = 3{,}4 \times 10^{22}$ N.

Cuando veamos la 3ra ley de Newton, vamos a discutir nuevamente este concepto. Por ahora vamos a notar que un cuerpo cerca de la tierra también siente una fuerza hacia el centro de la tierra. Es mas, si no consideramos la fricción del aire, todos los cuerpos son acelerados con la misma aceleración $|\vec{a}| = g = 9{,}81$ m/s^2. Por lo tanto podemos decir que hay una fuerza que apunta hacia el centro de la tierra que se denomina el peso

$$\vec{w} = \sum_i \vec{F} = m\vec{g}$$

Cuando nos "pesamos" en realidad la pesa mide la fuerza que ejercemos sobre la pesa. Esta calibrada de esta manera y se le denomina el peso aparente. Si hacemos medidas de $\vec{g}$ encontraremos que varia sobre la superficie de la tierra, con la altura sobre la tierra, con la latitud, etc. Por ejemplo, sobre la luna el peso de un objeto de masa m es 1/6 del peso que tendría sobre la superficie de la tierra.

Problema: La tierra da vueltas alrededor de su eje. Estime la aceleración centrípeta.

La aceleración centrípeta es

$$a_c = |\vec{a}| = \omega^2 |\vec{r}| = 0{,}03 \ m/s^2$$

ya que $\omega = 2\pi/P$, con $P = 3600 \times 24$ s y $R = 6300$ km.

---

1. Notemos que es la gravedad de la tierra quien mantiene el movimiento de un cuerpo cerca de la superficie de la tierra en forma circular.

2. Veremos que la diferencia entre la aceleración de gravedad y la aceleración centrípeta es compensada por la fuerza normal N del suelo que mantiene los cuerpos en movimiento circular.

$$m\vec{a} = -mg\hat{r} - \vec{N}$$

   Veremos mas adelante que esta fuerza normal es el peso del cuerpo.

3. Dado que $g > a_c$ entonces la gravedad es suficiente para mantener los cuerpos en movimiento circular. Si sucediera que $g < a_c$ entonces la tierra se desarmaría ya que la gravedad no seria suficiente para mantener los cuerpos en movimiento circular. Vemos que la tierra no es nada mas que una aglomeración de piedras y tierra mantenidas unidas por esta fuerza, su propio peso.

4. Hay casos que son inestables donde $\omega \sim \sqrt{Rg}$ y donde cualquier perturbación puede desarmar este objeto.

4. Tercera Ley de Newton: Principio de acción y reacción

Si un cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{A,B}$ sobre un cuerpo B, entonces el cuerpo B ejerce una fuerza $\vec{F}_{B,A}$ opuesta y de igual magnitud sobre el cuerpo A.

$$\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A}$$

1. Cuando dos objetos interactúan, esto cuerpos ejercen fuerzas en el otro, y la 3ra ley de Newton dice que estas fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en dirección.
2. Es muy importante darse cuenta que $\vec{F}_{A,B}$ actúa sobre B y que $\vec{F}_{B,A}$ actúa sobre A. Dado que tienen en general diferentes masas, sus aceleraciones tiene diferentes magnitudes.
3. Este principio de "acción y reacción" es fundamental ya que permite estudiar las fuerzas entre los objetos midiendo la aceleración de ellos. Por ejemplo, ha permitido establecer que hay 4 fuerzas o interacciones fundamentales en la naturaleza.
4. La interacción entre los cuerpos no requieren necesariamente que los cuerpos estén en contacto. El ejemplo mas simple es la atracción que siente la tierra hacia el sol.

Problema: Use la tercera ley de Newton para estimar cuanto cambia el periodo de la tierra cuando una persona camina?

Usando el principio de acción y reacción, usando que una persona tiene una masa de $m = 100$ km y al correr acelera con $a = 1$ m/s^2 durante $\Delta t = 1$ segundo (esto es como dar un paso), podemos estimar la aceleración de la tierra como

$$a_T = \frac{m}{M_T} a = 2 \times 10^{-22}$$

Un punto en la superficie cambiara de velocidad como

$$\Delta v = a_T \Delta t$$

y por lo tanto durante un día la tierra andará una distancia extra de

$$\Delta x = \Delta v T$$

con T como el periodo de la tierra. Entonces la tierra durante un día no solo rotara la distancia $2\pi R$, sino que andará una distancia extra, dada por Δx. El cambio en el periodo es entonces

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta x}{2\pi R} = \frac{\Delta v T}{2\pi R} = \frac{a_T \Delta t T}{2\pi R} = 5 \times 10^{-25}$$

Podemos hacernos una idea de la importancia de este principio tratando de derivar la forma de la fuerza de gravedad mirando el periodo y la distancia de los planetas, asumiendo que las órbitas son razonablemente circulares. Acordemonos que la aceleración centrípeta tiene magnitud

$$a_c = \omega^2 r$$

En la Tabla 4 tenemos los valores del periodo y la distancia de los planetas al sol. En la Fig. 3a y Fig. 3b tenemos el gráfico de $a_c r^2$ vs r y $a_c r^2$ vs ω respectivamente. Por lo tanto podemos decir que la fuerza que mantiene a los planetas dando vuelta alrededor del sol satisface

$$T^2 = cr^3$$

esta relación fue encontrada por Kepler y utilizada por Newton para escribir su famosa fuerza de la gravedad. La fuerza que mantiene a los planetas girando alrededor del sol se puede escribir entonces como

$$a_c = \frac{a_o}{r^2}$$

donde a_o es una constante que se puede encontrar. Por lo tanto la fuerza que ejerce el sol sobre un planeta es en la dirección radial entre los dos cuerpos y con magnitud

$$|\vec{F}_{S,P}| = m_p a_c = \frac{m_p a_o}{r^2}$$

donde m_p es la masa del planeta. Si asumimos que el principio de acción y reacción se da, entonces podemos decir que la fuerza que siente el sol debido a un planeta debería tener la misma forma

$$|\vec{F}_{P,S}| = \frac{m_S a_1}{r^2}$$

pero como las dos fuerzas tiene la misma magnitud, entonces

$$|\vec{F}_{P,S}| = |\vec{F}_{S,P}| = \frac{G m_S m_P}{r^2}$$

con la dirección definida por ser una fuerza de atracción entre los cuerpos y por la linear entre los dos cuerpos (radial). Esto se le denomina una **Fuerza central**. La constante G se puede derivar si conocemos la masa del sol ($m_S = 1{,}989 \times 10^{30}$), la masa de la tierra ($m_P = 5{,}98 \times 10^{24}$ kgs), y la distancia entre la tierra y el sol, lo que da $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$.

Planeta	Periodo	Distancia
Mercurio	87,97 días	57.910.000 km
Venus	224,7 días	108.200.000 km
Tierra	365,256 días	149.600.000 km
Martes	686,98 días	227.940.000 km
Júpiter	11,86 años	778.330.000 km
Saturno	29,46 años	1.429.400.000 km
Urano	84,01 años	2.870.990.000 km
Neptuno	164,8 años	4.504.300.000 km
Plutón	248,54 años	5.913.520.000 km

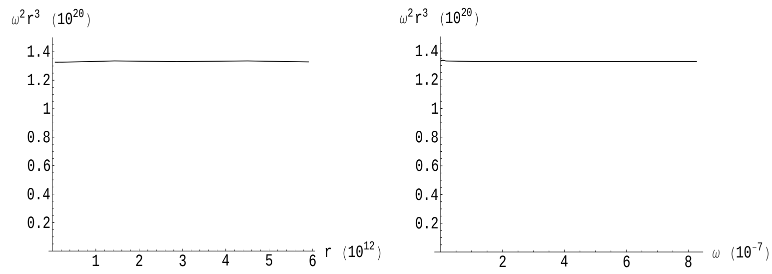

Figura 3: (a) $\omega^2 r^3$ vs r. (b)$\omega^2 r^3$ vs ω

Podemos ver que la tercera ley de Newton es extremadamente fundamental, y nos ha permitido encontrar la naturaleza de las interacciones de la naturaleza.

5. Fuerzas Macroscópicas y diagramas de Fuerzas

La estrategia para resolver problemas de fuerzas es seguir los siguientes pasos:

1. Construir el diagrama de cada cuerpo con las fuerzas vectoriales
2. Definir un sistema de referencia donde describir las ecuaciones de Newton en forma de componentes
3. Aplicar las restricciones necesarias
4. Chequear las unidades y limites de la solución

Es importante notar que en nuestro mundo macroscópico estamos acostumbrado a muchas fuerzas o interacciones, pero solo existen 4 fuerzas fundamentales. Ahora veremos algunas fuerzas macroscópicas:

1. Fuerzas entre solidos: cuando dos solidos están en contacto, se generan fuerzas entre ellos. Por ejemplo, asumamos que tenemos un objeto moviéndose a lo largo de una superficie como se muestra en la Fig. 4.

   a) Como el cuerpo se mueve a lo largo de la superficie, es necesario que exista una fuerza normal a la superficie que cancele la fuerza de gravedad. Esta fuerza se denomina la fuerza normal como se muestra en la Fig. 4a. Es importante notar que esta fuerza es perpendicular a la superficie, y cancela cualquier fuerza que pretenda forzar al cuerpo cruzar la superficie, como se observa en la Fig. 4b.

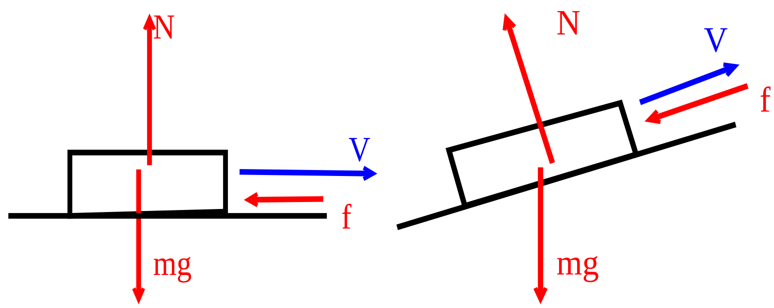

Figura 4: (a) fuerzas verticales (b)fuerzas horizontales

b) También tenemos fuerzas horizontales. Es nuestra experiencia que existe una fuerza de fricción que desacelera al cuerpo si es dejado por si mismo. Esta fuerza en la dirección opuesta a la velocidad, como se muestra en la Fig. 4a-b

c) Lo que hemos construido es un **diagrama de fuerza** sobre el cuerpo. Con este diagrama podemos calcular la aceleración del cuerpo, ya que

$$\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

2. Resortes: Si un resorte es comprimido o extendido una pequeña distancia Δx, es encontrado experimentalmente que el resorte ejerce una fuerza proporcional a Δx y en la dirección que trata de volver al equilibrio.

$$F = -k\Delta x$$

como se observa en Fig. 5a-b

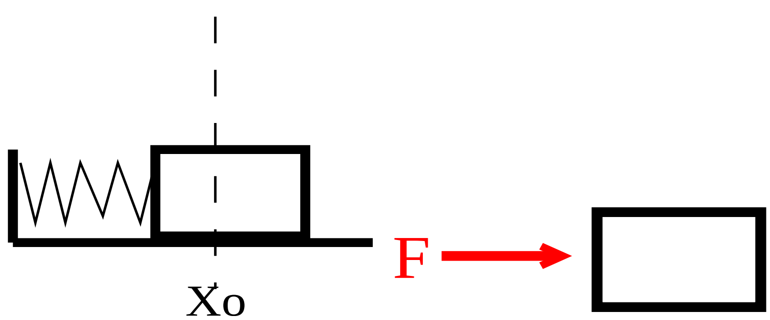

Figura 5: (a) Resorte (b) Diagrama de Fuerzas con Resorte.

3. Cuerdas: Cuando uno tira de una cuerda, se ejerce una fuerza llamada tensión sobre objetos amarrados en la cuerda, como se observa en la Fig. 6a-b. Notemos que si la masa de la cuerda es muy pequeña entonces

$$0 = m\vec{a}_c = \vec{F} - \vec{T} \qquad \rightarrow \qquad F = T$$

lo mismo aplica para cada sección de la cuerda dm. Sobre cada sección tenemos que $dma = T_1 - T_2$, pero si $dm = 0$ es muy pequeña entonces $T_1 = T_2$.

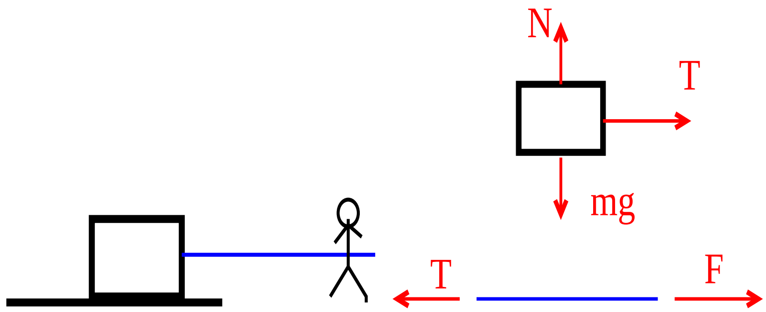

Figura 6: (a) Cuerda, (b) Diagrama de Fuerza del cuerpo y de la cuerda.

Hemos definido la idea de **diagramas de fuerza** o **diagrama de cuerpo libre**, que representan las fuerzas vectoriales que actúan sobre un cuerpo.

Problema: En la Fig. 7a tenemos el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo en un plano inclinado. Cuanto se demora el cuerpo en caer si parte del reposo una distancia L sobre el plano inclinado.

Dado que ya tenemos el diagrama de fuerzas, ahora elegimos el sistema de coordenadas con x a lo largo del plano inclinado e y perpendicular a este, como se observa en la Fig. 7a. Notemos que este es un sistema inercial, ya que su origen no se mueve. En este sistema de coordenadas podemos escribir la 2da ley de Newton como

$$ma_x = mg\sin\theta$$
$$ma_y = N - mg\cos\theta$$

pero como sabemos que no hay movimiento en y, esto se $y = 0$, la cual se convierte en nuestra restricción, dando

$$a_y = 0 \qquad \rightarrow \qquad N = mg\cos\theta$$

Notemos que la restricción nos permite evaluar la fuerza de restricción que en este caso es la **fuerza normal**. Para este problema, no vamos a necesitar N, pero cuando incluyamos la fricción esto va a ser muy útil. La aceleración a lo largo del plano inclinado es

$$a_x = g\sin\theta$$

y el tiempo que se demora en llegar abajo ($x(t_s) = L$) es

$$x(t) = \frac{a_x}{2}t^2 \qquad \rightarrow \qquad t_s = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta}}$$

También podríamos haber utilizado el otro sistema de referencia de la Fig. 7a. En ese caso tenemos

$$ma_x = -N\sin\theta$$

$$ma_y = N\cos\theta - mg$$

La restricción es un poco mas complicada en este sistema de referencia ya que a_x y a_y están relacionados porque la masa se mueve en el plano inclinado. Esto quiere decir que la restricción es

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

Tomando dos derivadas de esta relación obtenemos que

$$a_y = a_x \tan\theta$$

Usando las ecuaciones de Newton tenemos

$$N\cos\theta - mg = -N\sin\theta\tan\theta \qquad \rightarrow \qquad N = mg\cos\theta$$

con antes. Con esto obtenemos

$$a_x = -g\sin\theta\cos\theta$$

Evaluando el tiempo en la posición $x = 0$ (la condición inicial es $x(0) = L\cos\theta$ en este sistema de referencia), tenemos

$$x(t) = L\cos\theta + \frac{a_x}{2}t^2 \qquad \rightarrow \qquad t_s = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta}}$$

obtenemos el mismo valor de antes.

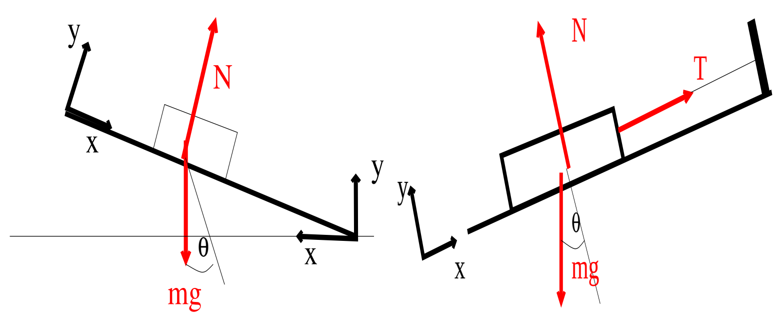

Figura 7: (a) Cuerpo en un plano inclinado. (b) Cuerpo amarrado a una cuerda.

Problema: En la Fig. 7b tenemos el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo que esta amarrado con una cuerda a un poste en un plano inclinado. Cuanto debe de ser la magnitud de la tensión para que el cuerpo no caiga. Si la cuerda se rompe, y el plano tiene un largo L, cual es la velocidad del cuerpo cuando llega al suelo?

Primero en nuestro sistema de coordenadas la segunda ley de Newton es

$$ma_x = T - mg\sin\theta$$
$$ma_y = N - mg\cos\theta$$

dado que no debe de haber movimiento, tenemos que $T = mg\sin\theta$. Si se corta la cuerda, entonces $ma_x = -mg\sin\theta$ y por lo tanto si el cuerpo parte con $v_o = 0$, podemos encontrar la velocidad en el suelo, como

$$v^2 = v_o^2 + 2a_x(0 - L) \qquad \rightarrow \qquad v_f = \sqrt{2mgL\sin\theta}$$

Problema: Supongamos que tenemos un cuerpo de masa m sobre un resorte en un plano inclinado, como se muestra en la Fig. 8a. Encuentre el nuevo punto de equilibrio del resorte.

Primero escribamos las leyes de Newton si el resorte esta comprimido de su distancia de equilibrio

$$ma_x = -k(x_o - x) - mg\sin\theta$$
$$ma_y = N - mg\cos\theta$$

El nuevo punto de equilibrio del resorte se da donde la fuerzas sobre el cuerpo son cero, esto es cuando $x_e - x_o = -mg\sin\theta/k$.

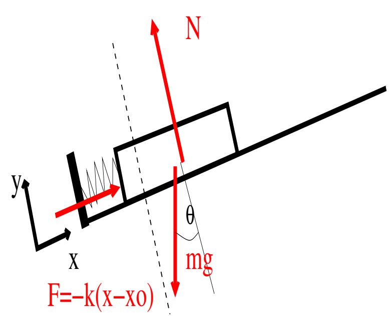

Figura 8: (a) Cuerpo con un resorte.

Problema: Supongamos que tenemos un auto atascado en un pantano como se muestra en la Fig. 9a. Si utilizamos una cuerda para sacar el auto, demuestre que es mas eficiente tirar de la cuerda en la dirección perpendicular a la cuerda que en la dirección de la cuerda.

Primero vemos que si tiramos en la dirección de la cuerda obtenemos una aceleración de

$$a = \frac{F}{m}$$

pero si tiramos en la dirección perpendicular obtenemos que

$$a = \frac{T}{m}$$

Ahora tenemos que encontrar la tensión T. Miremos el diagrama de fuerzas en el punto donde se tira de la cuerda. Allí tenemos (asumiendo que las cuerdas tiene masa cero) que

$$0 = m_c a_x = F - 2T sin\theta$$

por lo tanto $T = F/2\sin\theta$ y si θ es pequeño (eje. $\theta = 5^o$) entonces $T = 5{,}7F$. F es amplificado varias veces.

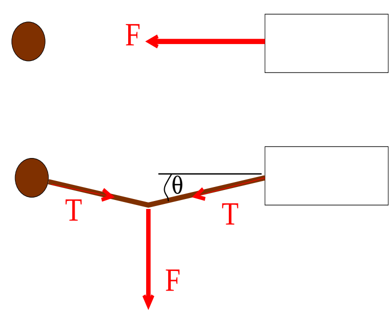

Figura 9: (a) Como salir de un pantano amarrando una cuerda entre el auto y un árbol. La idea es tirar perpendicular a la cuerda y mantener el anulo θ muy pequeño.

Problema: Tenemos una masa m con una velocidad inicial v_o (a nivel del suelo) que se mueve sobre un plano inclinado sin fricción como se muestra en la Fig. 10. (a) Encuentre la velocidad inicial mínima v_{min} para llegar al tope del plano inclinado, el cual tiene un largo L. (b) Encuentre la distancia R a la que llega la masa en termino de v_o, v_{min}, θ. si $v_0 > v_{min}$

Primero necesitamos encontrar las fuerzas que actúan sobre la masa m. En este caso conviene usar el sistema de referencia de la Fig. 11. En este sistema tenemos

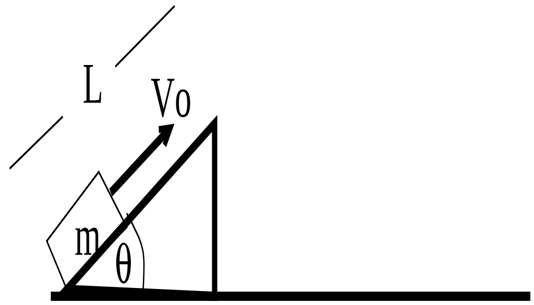

Figura 10: (a) Diagrama

$$\begin{aligned} ma_x &= -mg\sin\theta \\ ma_y &= N - mg\cos\theta \end{aligned}$$

donde $a_y = 0$. Por lo tanto si el cuerpo quiere llegar al tope del plano inclinado, necesitamos encontrar $v_o = v_{min}$ tal que $v_f = 0$ cuando $\Delta x = x_f - x_i = L$. Podemos utilizar

$$v_f^2 - v_o^2 = 2a_x\Delta x \qquad \rightarrow \qquad v_{min} = \sqrt{2gL\sin\theta}$$

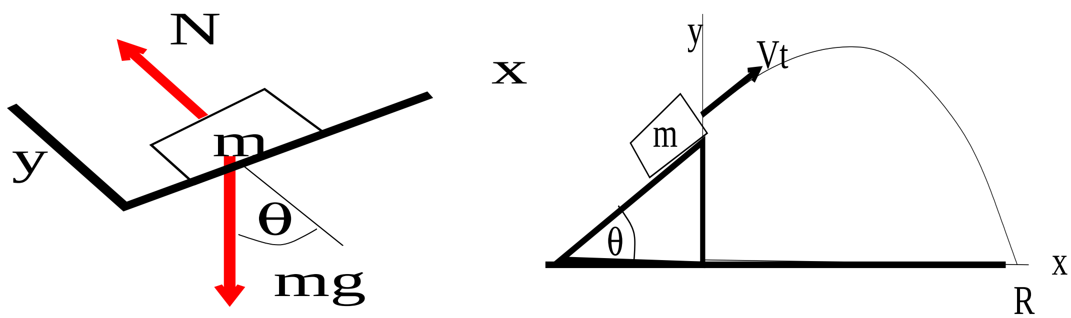

Figura 11: (a) Diagrama de fuerzas. (b) sistema de coordenadas utilizada luego de superar el tope del plano inclinado $v_t > v_{min}$.

Si $v_o > v_{min}$ entonces la velocidad al tope del plano inclinado va a ser $v_f = v_t > 0$. Nuevamente podemos utilizar

$$v_f^2 - v_o^2 = 2a_x\Delta x \qquad \rightarrow \qquad v_t = \sqrt{v_o^2 - 2gL\sin\theta}$$

Notemos que $v_o^2 > 2gL\sin\theta$ por construcción.
Si el cuerpo logra superar el tope del plano, $v_t > 0$, entonces tenemos el problema de trayectoria parabólica (movimiento uniformemente acelerado), donde las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} x(t) &= v_t t\cos\theta \\ y(t) &= L\sin\theta + v_t t\sin\theta - \tfrac{g}{2}t^2 \end{aligned}$$

Notemos que ahora cambiamos al sistema de coordenadas donde y esta orientado con la gravedad, como se muestra en la Fig. 11b. En este caso la nueva velocidad inicial tiene magnitud v_t, pero con componentes $v_{0,x} = v_t \cos\theta$ y $v_{0,y} = v_t \sin\theta$. El cuerpo sale desde una altura $h = L\sin\theta$. En algún instante del t_s, la masa llega al suelo, donde podemos calcular la distancia R como

$$\begin{aligned} x(t_s) &= R \\ y(t_s) &= 0 \end{aligned}$$

De la segunda expresión podemos despejar t_s como

$$t_s = \frac{-v_t \sin\theta \pm \sqrt{v_t^2 \sin^2\theta + 2gL\sin\theta}}{-g}$$

La única solución razonable es la positiva y tenemos

$$t_s = \frac{v_t \sin\theta + \sqrt{v_t^2 \sin^2\theta + 2gL\sin\theta}}{g}$$

por lo tanto

$$R = x(t_s) = \frac{v_t^2 \cos\theta}{g}\left[\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \left(\frac{v_{min}}{v_t}\right)^2}\right]$$

Problema: Supongamos que nos pesamos en un elevador que esta acelerando hacia arriba, y medimos 960 N. Luego agregamos 20 km mas y obtenemos 1200 N. Cuando peso? Cuanto es mi masa? y cuanto es la aceleración?

Primero, tenemos que mirar en un sistema de referencia inercial, ya que el sistema esta claramente acelerando. Tomemos el suelo, y miremos el diagrama de fuerzas como muestra la Fig. 12a-b.

$$ma = N - mg$$

por lo tanto la fuerza que mide la pesa es

$$N = mg + ma$$

Por lo tanto si mi masa es M, y le agregamos $\Delta m = 20$ kgs, tenemos las siguientes relaciones

$$960 = M(g + a)$$

$$1200 = (M + \Delta m)(g + a)$$

de donde podemos despejar $M = 80$ kgs y $a = 3$ m/s^2

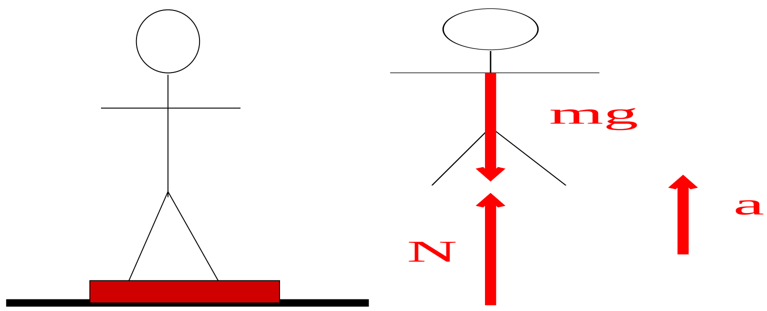

Figura 12: (a) Ascensor acelerando. (b) Diagrama de fuerzas. N es la fuerza que mide la pesa.

6. Problemas con dos o mas Cuerpos

Cuando atacamos problemas de varios cuerpos es importante dibujar el diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo incluyendo las fuerzas dadas por la 3ra ley de Newton.

Problema: En la Fig. 13a se muestra el diagrama de la Máquina de Atwood donde tenemos dos masas conectadas por una cuerda sin masa que pasa por una polea sin masa. Cual es la aceleración del sistema.

Como la cuerda y la polea no tiene masa, entonces la T de la cuerda es la misma a lo largo de la cuerda. Por lo tanto la T sobre las dos mases es la misma. La segunda ley de Newton es entonces

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T - m_1 g \\ m_2 a_2 &= T - m_2 g \end{aligned}$$

Aquí tenemos 3 variables que no conocemos, a_1, a_2, T. Pero si las dos masas se mueven conectadas, entonces tenemos la relación que $a_1 = a = -a_2$. Por lo tanto tenemos que

$$a = g\frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

y la tensión es

$$T = g\frac{(m_2 m_1)}{m_1 + m_2}$$

Obtenemos que la menor masa se mueve hacia arriba y la mayor hacia abajo.

Problema: Problema de una polea. Supongamos que tenemos el sistema de una polea como se muestra en la Fig. 14a. Cual es la fuerza F necesaria para que la masa se mueva hacia arriba?

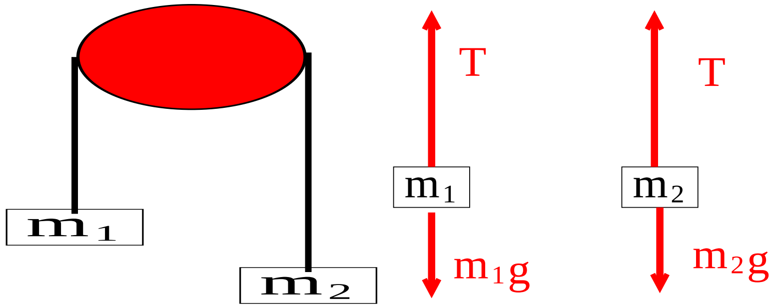

Figura 13: (a) Máquina de Atwood (b) Diagrama de fuerzas

Mirando el diagrama de fuerzas Fig. 14b tenemos que

$$\begin{aligned} F &= T \\ ma &= T - mg \end{aligned}$$

Por lo tanto si queremos que la masa se mueva hacia arriba, la fuerza por lo menos debería ser suficiente

$$F \geq mg$$

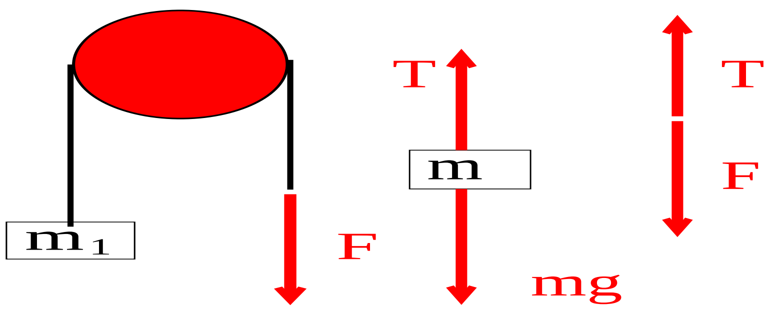

Figura 14: (a) Sistema de una polea (b) Diagrama de fuerzas

Problema: problema de 2 poleas. Supongamos que tenemos el sistema de una polea como se muestra en la Fig. 15a. Cual es la fuerza F necesaria para que la masa se mueva hacia arriba?

Mirando el diagrama de fuerzas Fig. 15b tenemos que

$$\begin{aligned} F &= T \\ ma &= 2T - mg \end{aligned}$$

Por lo tanto si queremos que la masa se mueva hacia arriba, la fuerza por lo menos debería ser suficiente

$$F \geq \frac{mg}{2}$$

Vemos que este sistema nos permite levantar la masa con la mitad de la fuerza. Obviamente, es necesario mover la cuerda el doble de la distancia que el problema anterior.

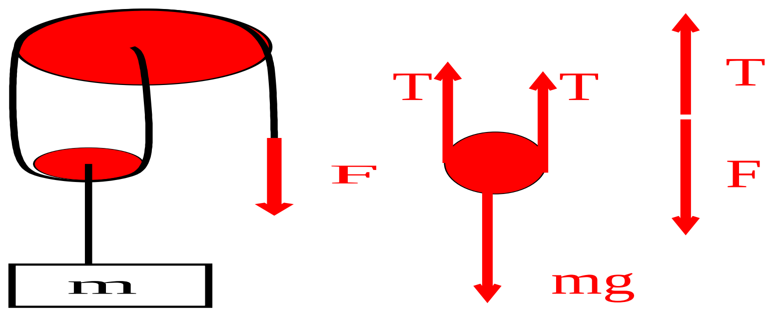

Figura 15: (a) Sistema de dos poleas (b) Diagrama de fuerzas

---

7. Restricciones y sistemas no-inerciales

Existe un problema fundamental que tenemos que aplicar cuando tenemos mas de un cuerpo, y esto son las restricciones.
Ya hemos utilizando en forma intuitiva el concepto de restricciones cuando en el problema de la polea establecimos que $a_1 = -a_2$, pero necesitamos hacer esto en forma mas explicita.

Problema: Consideremos el problema anterior de las dos masas colgando de una polea, como se observa en la Fig. 16a. (a) Resolvamos con restricciones. (b) Asumamos que la polea es acelerada con aceleración constante a, encuentre la aceleración de las masas y la tensión en la cuerda.
Cuando la polea esta en reposo la segunda ley de Newton es entonces

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T - m_1 g \\ m_2 a_2 &= T - m_2 g \end{aligned}$$

Aquí tenemos 3 variables que no conocemos, a_1, a_2, T. Pero si las dos masas se mueven conectadas. Vemos primero que

$$y_1' + y_2' + \pi R = L$$

entonces tenemos la restricción

$$2y = y_1 + y_2 + L - \pi R \qquad \rightarrow \qquad a_1 + a_2 = 0$$

como se observa en la Fig. 16b. Por lo tanto tenemos que $a_1 = -a_2$. Utilizando esta relación tenemos

$$a_1 = g\frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

y la tensión es

$$T = g\frac{(m_2 m_1)}{m_1 + m_2}$$

si la polea esta acelerando, entonces tenemos las mismas ecuaciones de Newton, ya que las variables y_1 e y_2 son variables del sistema inercial. Notemos que acá también las tensiones son iguales, ya que aunque un pedazo de cuerda este acelerado

$$dma = T_1 - T_2 = 0$$

porque su masa es cero. Lo que cambia aquí es la restricción, que nos da

$$2y = y_1 + y_2 + L - \pi R \qquad \rightarrow \qquad 2a = a_1 + a_2$$

porque y es una variable que cambia en el tiempo como

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a$$

Insertando estas variables en la ecuaciones de arriba tenemos que

$$\begin{array}{lcl} m_1 a_1 & = & T - m_1 g \\ m_2(2a - a_1) & = & T - m_2 g \end{array}$$

Resolvemos para obtener

$$a_1 = 2a\frac{m_2}{m_1 + m_2} - g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$a_2 = 2a\frac{m_1}{m_1 + m_2} + g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$T = 2(g + a)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

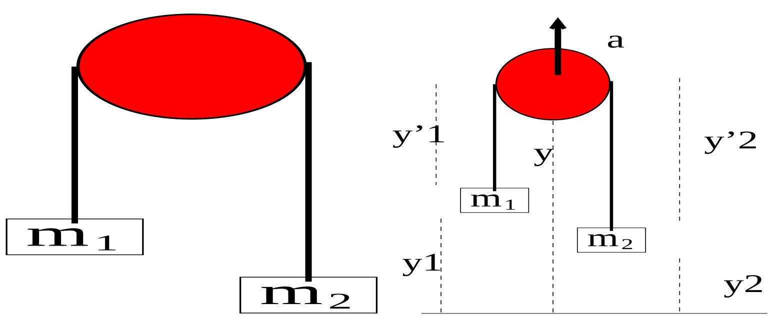

Figura 16: (a) Sistema de una polea (b) Polea acelerada

Problema: Consideremos una masa m_2 que se mueve sobre un triángulo de masa m_1 y ángulo θ sin fricción, Fig. 17a. Que aceleración sienten las dos masa si se mueven juntas? En que dirección se mueven? Si el triángulo tiene una altura de h y la masa m_2 parte del reposo, cuanto tiempo se demora en llegar al suelo? Para que ángulo las masas se separan?

Tenemos el diagrama de fuerzas del la Fig. 17b. Es importante notar que no se puede usar un sistema de referencia sobre el triangulo porque no es inercial (el triangulo esta acelerando). Por lo tanto es necesario escribir el movimiento de los cuerpos en el sistema de referencia inercial $x - y$ de la Fig. 17c. En este sistema podemos escribir las fuerzas como

$$\begin{aligned} m_2 a_{2,x} &= N \sin\theta \\ m_2 a_{2,y} &= -m_2 g + N\cos\theta \\ m_1 a_{1,x} &= -N\sin\theta \\ M_1 a_{1,y} &= N_1 - N\cos\theta - m_1 g \end{aligned}$$

Aquí vemos que tenemos 6 incógnitas y 4 ecuaciones, lo que implica que tenemos que encontrar 2 restricciones. Rápidamente nos damos cuenta que $a_{1,y} = 0$, lo que determina $N_1 = +N\cos\theta + m_1 g$. Aun tenemos que resolver por $a_{2,x}$, $a_{2,y}$, $a_{1,x}$ y N, pero solo tenemos 3 ecuaciones, por lo tanto tenemos que incluir una ecuación extra, que es **la restricción**. Notemos que $a_{2,x}$, $a_{2,y}$ no son independientes ya que esta masa se mueve restringida por el plano inclinado, esta es precisamente la restricción que andamos buscando. En la Fig. 17d definimos las variables auxiliares $s(t)$ y $r(t)$ con las cuales podemos relacionar las otras aceleraciones con

$$\begin{aligned} x_2 &= s - r\cos\theta & \rightarrow \quad & a_{2,x} = a_s - a_r\cos\theta \\ y_2 &= r\sin\theta & \rightarrow \quad & a_{2,y} = a_r \sin\theta \\ x_1 &= s & \rightarrow \quad & a_{1,x} = a_s \\ y_1 &= 0 & \rightarrow \quad & a_{1,y} = 0 \end{aligned}$$

tomando las derivadas de las expresiones de la izquierda y usando las definiciones (notemos que θ no depende del tiempo)

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \\ a_r &= \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

Notemos que convertimos 3 variables dependientes ($a_{2,x}$, $a_{2,y}$, y $a_{1,x}$) a 2 variables independientes (r y s). Al incluir estas relaciones en las ecuaciones de Newton, vemos que finalmente tenemos 3 incógnitas a_s, a_r, N y justo 3 ecuaciones de movimiento para resolverlas. Luego de un buen rato de álgebra obtenemos que

$$\begin{aligned} a_s &= -g\frac{m_2\sin\theta\cos\theta}{m_1 + m_2\sin^2\theta} \\ a_r &= -g\frac{(m_1+m_2)\sin\theta}{m_1 + m_2\sin^2\theta} \\ N &= -g\frac{m_1 m_2\cos\theta}{m_1 + m_2\sin^2\theta} \end{aligned}$$

con lo cual podemos construir las aceleraciones en el sistema inercial como

$$\begin{aligned} a_{1,x} &= g\tfrac{m_2 \sin\theta\cos\theta}{m_1+m_2\sin^2\theta} \\ a_{2,x} &= -g\tfrac{m_1 \sin\theta\cos\theta}{m_1+m_2\sin^2\theta} \\ a_{2,y} &= -g\tfrac{(m_1+m_2)\sin^2\theta}{m_1+m_2\sin^2\theta} \end{aligned}$$

y por lo tanto la masa se demora

$$t = \sqrt{\frac{2h}{-a_{2,y}}} = \sqrt{\frac{2h(m_1+m_2\sin^2\theta)}{g(m_1+m_2)\sin^2\theta}}$$

Si queremos saber si existe un ángulo donde las masas se separan ($N = 0$), tenemos que entender lo que esta pasando en la dirección perpendicular al triángulo. La fuerza normal es

$$N = \frac{m_1 m_2 g\cos\theta}{m_1 + m_2\sin^2\theta}$$

se hace cero cuando $\theta = 90^o$, lo cual es de esperarse.

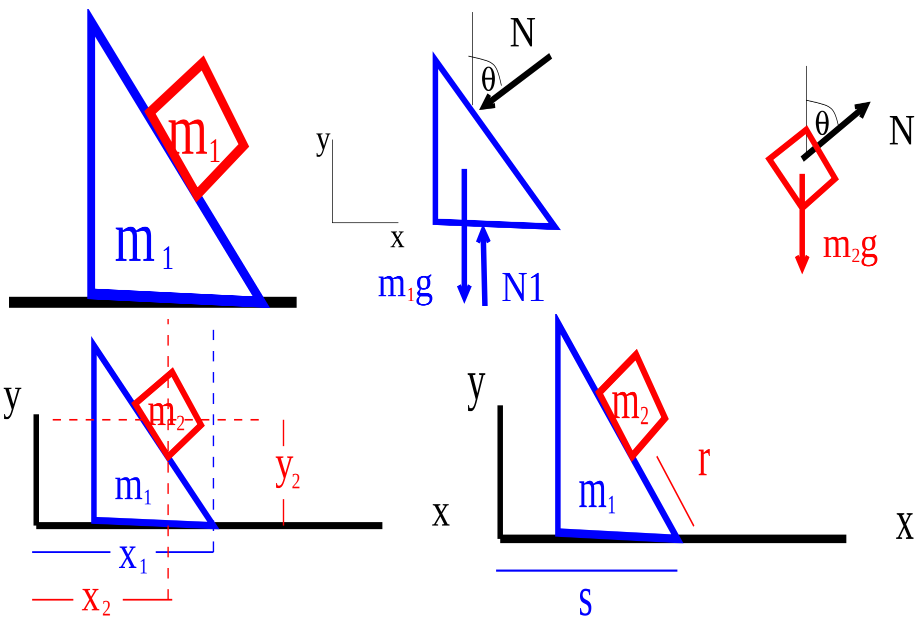

Figura 17: (a) Problema del triángulo. (b) Diagrama de fuerzas. (c) Sistema de referencia. (d) Restricciones en termino de r y s.

---

8. Interacciones Fundamentales

Aparte de la fuerza de gravedad que ya hemos visto, se ha encontrado 4 fuerzas fundamentales en la naturaleza, estas son (ver sugiere ver el Capitulo 41 de Tipler)

Fuerza	Lugar de acción	Intermediador	Rango
Gravedad	atracción mutua entre masas	Graviton	Infinito
electromagnética	entre cargas eléctricas	Fotón	Infinito
La fuerza nuclear fuerte	entre partículas subatomicas	gluon	Núcleo
La fuerza nuclear débil	entre partículas subatomicas durante decaimiento radiactivo	$W^{\pm}$ Z^{0}	subatomico

Todas estas fuerzas, como la de gravedad, **actúan a la distancia** lo cual en principio tomarse como un error. En la Física clásica se resuelve este problema pensando en campos, que actúan como intermediarios de las fuerzas. En la Física cuántica, estas interacciones están mediadas por partículas elementales. Por ejemplo, la fuerzas de gravedad tiene al graviton como intermediador.

9. Estructura de la Materia

Es interesante darse cuenta que la materia se puede considerar en una primera aproximación como átomos conectados por resortes. Esta es una aproximación que es razonablemente buena.

1. A un primer nivel macroscópico la materia se puede caracterizar como plasma, gaseoso, liquido, solido. En general consideramos este el mundo de la termodinámica macroscópica.
2. A un mas fundamental podemos considerar a la materia como (aproximadamente 120) átomos donde los átomos, a través de fuerzas interatomicas, forman moléculas, macromoleculas, proteínas, etc. El tratamiento acá es de origen cuántico y semi-clásico
3. A un nivel mas fundamentar podemos considerar la materia como partículas mas fundamentales Baryones (protones, neutrones, etc.), Mesones (Pions, Kaons, etc.) y Leptones (electrones, neutrinos, etc). A qui el origen es claramente cuántico.
4. A un nivel aun mas fundamental podemos considerar la materia como partículas mas fundamentales: quarks, Leptones y Bossones (que intermedian la fuerza entra partículas fundamentales).

Hoy en día hay un gran interés para tratar de unificar estas cuatro fuerzas bajo una gran teoría cuántica. Hasta ahora se han podido unificar dos de las fuerzas, en la famosa “electro-débil”. La segunda unificación se esta tratando de lograr a través de la teoría de supersimetria con la fuerza fuerte y la fuerza “electro-debil”.

La mas difícil de unificar al parecer es la fuerza de gravedad con las otras 3, y se supone que la teoría de “super cuerdas” permitirá en algún momento lograr este gran sueño de Einstein. En esta teoría las partículas elementales son oscilaciones de estas cuerdas. El único problema es que la teoría de “super cuerdas” exige que el universo tenga 11 dimensiones, por lo tanto se cree que las otras 7 dimensiones son muy difícil de observar.