Capitulo 4: Fuerzas constitutivas

Índice

1. Fuerza de Fricción **2**

2. Movimiento curvilíneo **7**

3. Fuerzas de Roce **10**

4. Apéndice I: Movimiento circular **11**
4.1. Velocidad angular constante 11
4.2. Velocidad angular variable 12

5. Apéndice II: Métodos de Integración numérica **13**

1. Fuerza de Fricción

Supongamos que tenemos una masa sobre un plano inclinado, Fig. 1a, y aumentamos lentamente el ángulo del plano. Sabemos que en algún ángulo θ_{max} la fuerza de fricción no va a ser suficiente para contrarrestar el componente de la fuerza de gravedad $mg\sin\theta$ y la masa m va deslizarse. Esto implica que la **fuerza de fricción estática** va a oponerse a la fuerza aplicada $mg\sin\theta$ hasta un valor máximo. Experimentalmente se ha encontrado que

$$f_s \leq \mu_s N$$

Intuitivamente sabemos que la fuerza de fricción esta de alguna forma relacionada con la fuerza normal. Mientras mas fuerte la fuerza normal, mas efectiva es la fuerza de fricción. Los que hacemos escalamiento de roca, sabemos que para mejorar la sustentación en la roca debemos aumentar la fuerza normal. Por lo tanto es de esperarse que la fuerza de fricción estática sea proporcional a la normal.

Un cuerpo en movimiento sufre la **fuerza de fricción cinética** que trata de detener el movimiento de los cuerpos relativo a la superficie donde se deslizan. Experimentalmente se ha encontrado que

$$f_k = \mu_k N$$

Si una rueda perfecta se hace rodar sobre una superficie, y hay suficiente fricción, esta rueda rodara una distancia infinita (veremos mas adelante que la fricción no hace trabajo sobre la rueda). Pero como no existen la ruedas ni la superficie son perfectas, tenemos que hay una pequeña fricción sobre el movimiento de las ruedas, dado por

$$f_r = \mu_r N$$

En general el coeficiente depende del material del cuerpo y de la superficie. En general tenemos $\mu_s \geq \mu_k \geq \mu_r$, ya que es mas eficiente para una rueda rodar que deslizarse. En general tenemos, que dada una fuerza aplicada F_a, la fuerza de fricción reacciona como se muestra en la Fig. 1b.

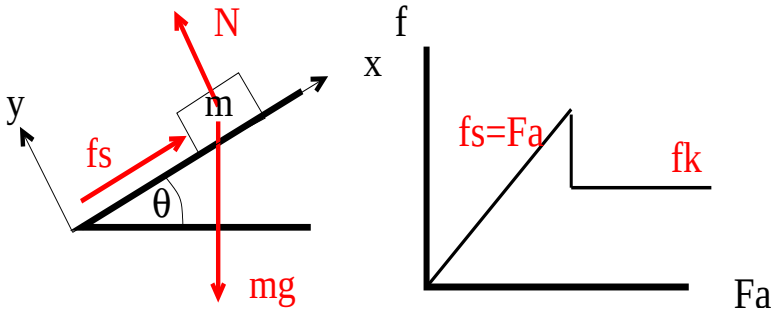

Figura 1: (a) Fuerza de fricción estática. (b) Respuesta de la fuerza de fricción a una fuerza aplicada

Ahora podemos resolver el problema de encontrar el ángulo θ_{max} basado en el diagrama de fuerzas de la Fig. 1a. Notemos que el sistema de referencia $x-y$ es un sistema inercial porque su origen no es acelerado. Por lo tanto

$$\begin{aligned} ma_x &= f - mg\sin\theta \\ ma_y &= N - mg\cos\theta \end{aligned}$$

si es cuerpo no esta en movimiento tenemos que la fuerza de fricción es la estática, con $N = mg\cos\theta$, y

$$mg\sin\theta = f \leq \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta \qquad \rightarrow \qquad \tan\theta_{max} \leq \mu_s$$

Si le damos un pequeño empujón a esta masa, entonces la masa acelerara con aceleración

$$ma_x = f_k - mg\sin\theta = \mu_k mg\cos\theta_{max} - mg\sin\theta_{max} \qquad \rightarrow \qquad a = g\frac{\mu_k - \mu_s}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$$

con la masa siempre moviéndose hacia abajo.

Problema: Que cambia si levantamos el ángulo lentamente como $\theta = \omega t$ sin que la masa se despegue de la superficie. En este caso el sistema de referencia $x' - y'$ es un sistema acelerado y por lo tanto no-inercial. No podemos escribir la 2da ley en este sistema. En este caso nos conviene escribir las leyes de Newton en el sistema inercial $x' - y'$ como lo muestra la Fig. 2a. El cuerpo esta a una distancia L del origen.

Elegimos el sistema inercial $x - y$ como se muestra en la Fig. 2a. En este sistema inercial podemos escribir las ecuaciones de Newton como

$$\begin{aligned} ma'_x &= f\cos\theta - N\sin\theta \\ ma'_y &= N\cos\theta + f\sin\theta - mg \end{aligned}$$

Supongamos que queremos que el cuerpo se quede a una distancia L sobre el plano inclinado (pero que no se mueva), entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= L\cos\theta = L\cos(\omega t) \\ y(t) &= L\sin\theta = L\cos(\omega t) \end{aligned}$$

donde debemos notar que x, y, θ dependen del tiempo t, y por lo tanto las aceleraciones no son cero. Tomando dos derivadas con respecto al tiempo obtenemos podemos encontrar la aceleración en el sistema inercial como

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega^2 L\cos\theta \\ a_y &= -\omega^2 L\sin\theta \end{aligned}$$

Incluyendo esto en las ecuaciones de Newton, tenemos

$$\begin{aligned} -m\omega^2 L\cos\theta &= f\cos\theta - N\sin\theta \\ -m\omega^2 L\sin\theta &= N\cos\theta + f\sin\theta - mg \end{aligned}$$

de donde podemos resolver que

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\theta \\ f &= -\omega^2 Lm + gm\sin\theta \end{aligned}$$

Queremos encontrar el valor mínimo de ω para que la masa puede ser soportada por la fricción estática $f \leq \mu_s N$, con lo cual obtenemos

$$-\omega^2 Lm + gm\sin\theta_{max} \leq \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta_{max}$$

o

$$(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) \leq \frac{\omega^2 L}{g}$$

Necesitamos satisfacer esta relación para todos los ángulos θ entre 0 y 2π. Esto implica encontrar el máximo de

$$f(\theta) = \sin\theta - \mu_s\cos\theta$$

Una primera aproximación es claramente $f(\theta) \leq 1 + \mu_s$. Una mejor aproximación es encontrar el máximo que sucede cuando su derivada es cero, esto es

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \cos\theta + \mu_s\sin\theta = 0 \qquad \rightarrow \qquad \cos\theta_m = -\mu_s\sin\theta_m$$

o

$$\tan\theta_m = -\frac{1}{\mu_s}$$

con lo cual

$$p = \frac{\omega^2 L}{g} \geq \sin\theta_m(1+\mu_s^2)$$

Mirar el valor de p para diferentes valores de μ_s en la Fig. 2b. Notemos que p se mide en unidades g.

Notemos: para el caso que el cuerpo se pueda mover (en el problema anterior no lo necesitamos) sobre el plano inclinado, podemos relacionar la posición entre los dos sistemas como

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

y relacionar las aceleraciones en los dos sistemas de coordenadas como

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega^2(x'\cos\theta - y'\sin\theta) - 2\omega(v'_x\sin\theta - v'_y\cos\theta) + a'_x\cos\theta - a'_y\sin\theta \\ a_y &= -\omega^2(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + 2\omega(v'_x\cos\theta + v'_y\sin\theta) + a'_x\sin\theta - a'_y\cos\theta \end{aligned}$$

Aquí aparecen estas fuerzas ficticias, en el sistema acelerado, llamadas fuerzas de **coriolis y centrifuga**. Estas fuerzas las veremos mas adelante, y están relacionadas con fuerzas ficticias que se

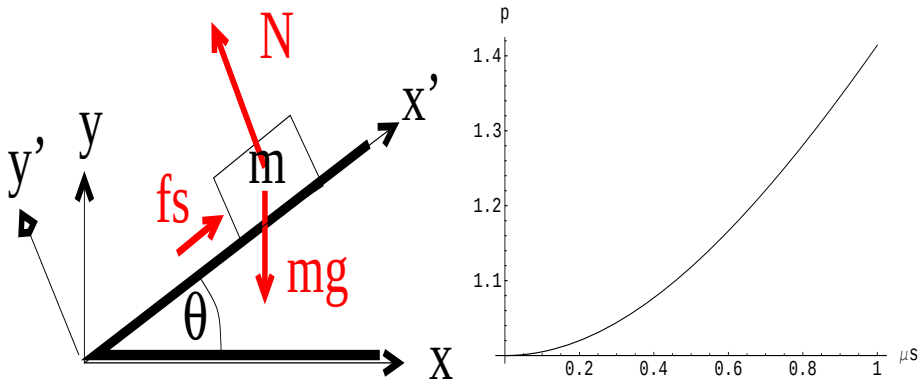

Figura 2: (a) Sistema de referencia inercial. (b) Mínima p necesaria para mantener el cuerpo en reposo con respecto al plano inclinado.

generan en la superficie de la tierra y son responsables, entre otros fenómenos, de los Huracanes. Para el caso en que en el sistema no-inercial el cuerpo no se mueve, tenemos $a'_x = a'_y = v'_x = v'_y = 0$, nuevamente llegamos a

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega^2 L \cos\theta \\ a_y &= -\omega^2 L \sin\theta \end{aligned}$$

Para el caso en que el cuerpo se mueve en el sistema no-inercial, podríamos tratar de encontrar cuando el cuerpo se cae, mirando cuando $N = 0$.

Problema: Supongamos que tenemos el problema de la Fig. 3a, con fricción en todas las superficies (polea sin fricción y sin masa; cuerda sin masa ... por ahora). Encuentre m_{max} cosas que la masa m_1 no resbale. Supongamos que para este valor de m_{max} le damos un pequeño empujón al sistema. Determine cuanto después cae la masa m_1 que la masa m_2 si $L_2 = 10$ m, $L_1 = 1$ m, $m_2 = 2$ kg, $m_1 = 1$ kg, $\mu_k = 0{,}5$, $\mu_s = 0{,}7$.

Primero utilicemos el diagrama de fuerzas de la Fig. 3b-d. Las fuerzas de acción y reacción son

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= N_{2,1} = N \\ f_{1,2} &= f_{2,1} = f \end{aligned}$$

donde es signo ha sido incorporado ya en la figura. Las ecuaciones de Newton dan entonces

$$\begin{aligned} ma_y &= mg - T \\ m_1 a_{1,x} &= f \\ m_1 a_{1,y} &= N - m_1 g \\ m_2 a_{2,x} &= T - f - f_1 \\ m_2 a_{2,y} &= N_1 - N - m_2 g \end{aligned}$$

Notemos que hemos escrito estas ecuaciones con respecto a un sistema de referencia inercial. Primero $a_{1,y} = a_{2,y} = 0$, lo que implica

$$\begin{aligned} N &= m_1 g \\ N_1 &= N + m_2 g = (m_1 + m_2) g \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} ma_y &= mg - T \\ m_1 a_{1,x} &= f \\ m_2 a_{2,x} &= T - f - f_1 \end{aligned}$$

Ahora si las 3 masas se tiene que mover juntas, tenemos que $a_y = a_{1,x} = a_{2,x} = a$, entonces podemos sumar las 3 ecuaciones y obtener

$$a = \frac{gm - f_1}{m + m_1 + m_2}$$

pero sabemos que todo el sistema se esta moviendo, de tal manera que $f_1 = \mu_k N_1$, entonces

$$a = g\frac{m - \mu_k(m_1 + m_2)}{m + m_1 + m_2}$$

Ahora podemos encontrar la restricción para la masa m, usando la segunda ecuación $m_1 a = f$ (aquí $f \leq \mu_s N$) por lo tanto

$$m_1 g\frac{m - \mu_k(m_1 + m_2)}{m + m_1 + m_2} \leq \mu_s m_1 g \qquad \rightarrow \qquad m \leq (m_1 + m_2)\frac{\mu_k + \mu_s}{1 - \mu_s}$$

Esta ultima relación se da solo si $\mu_s < 1$. Luego de darle el pequeño empujón, $f = \mu_k N$ y $a_{2,x} = a_y = a_2$ y $a_{1,x} = a_1$. Mirando nuestras tres ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} a_1 &= g\mu_k \\ a_2 &= g\frac{m + \mu_k(m_2 + m_1)}{m + m_2} \end{aligned}$$

y poniendo números tenemos que

$$\begin{aligned} m &= 12 m_1 \\ a_1 &= g\mu_k = 4{,}9 m/s \\ a_2 &= g\frac{13{,}5}{14} = 9{,}45 m/s \end{aligned}$$

Entonces m_1 se demora en caer

$$t_c = \sqrt{\frac{2L_1}{(a_2 - a_1)}} = 0{,}66 s$$

y cae con una velocidad

$$v_c = a_1 t_c = 3{,}23 m/s$$

luego de recorrer una distancia $\Delta x_1 = v_c^2/(2a_1) = 1{,}06$ m. La masa al caer tiene una desaceleración

$$a_1 = -\mu_k m_1 g = -5 m/s^2$$

con lo que se detiene en una distancia $\Delta x_2 = v_c^2/(2a_1) = 1{,}06$. La masa 1 no cae.

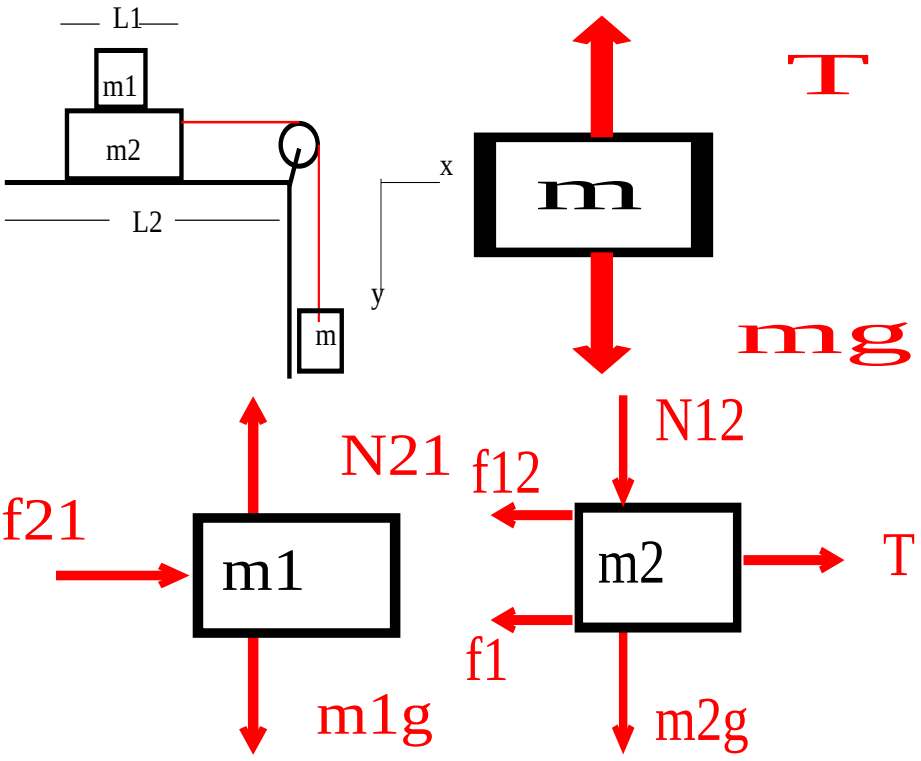

Figura 3: (a) Sistemas de referencia (b-d) Diagrama de Fuerzas.

2. Movimiento curvilíneo

Cuando un cuerpo se mueve en movimiento curvilíneo, la aceleración neta en la dirección radial en exactamente la aceleración centrípeta, por lo tanto

$$a_c = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_{i,r}$$

Es importante notar que aunque el movimiento no sea circular, podemos definir localmente un circulo tangente a la trayectoria , y por lo tanto un radio de circulo perpendicular a la trayectoria.

Problema: Supongamos que tenemos una "voleadora" (una piedra al final de una cuerda) que estamos girando a una velocidad $v = \omega r$ sobre su eje, ver Fig. 4a. Observamos que la cuerda tiene un largo L y que la voleadora tiene un ángulo θ con respecto a la horizontal como se observa en la Fig. 4b. Calcule la tensión sobre la cuerda. Si el lanzador suelta la cuerda, calcule la velocidad con que la piedra sale volando. A que distancia da con el suelo? La altura de un ser humano es h.
Usando el diagrama de fuerza de la Fig. 4b tenemos (notar que estamos usando un sistema inercial)

$$\begin{aligned} ma_x &= T\cos\theta \\ ma_y &= T\sin\theta - mg \end{aligned}$$

Debemos notar que la piedra no se mueve en la dirección y, por lo tanto $T = mg/sin\theta$. De la misma manera sabemos que la suma de las fuerzas en la dirección radial (en este caso x) produce un movimiento circular, por lo tanto $a_x = a_c = v_t^2/r$, con $r = L\cos\theta$. Esto implica que

$$m\frac{v_t^2}{r} = T\cos\theta \qquad \rightarrow \qquad v_t = \sqrt{\frac{gL\cos\theta^2}{\sin\theta}}$$

Dado que estamos a una altura h y con una $\vec{v}_o = v_t\widehat{i}$ tenemos que la piedra llega al suelo en un tiempo

$$y(t) - y_o = -\frac{g}{2}t^2 \qquad \rightarrow \qquad t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

y por lo tanto la voleadora llega a una distancia

$$d = v_r t_s = \sqrt{\frac{2hL\cos\theta^2}{\sin\theta}}$$

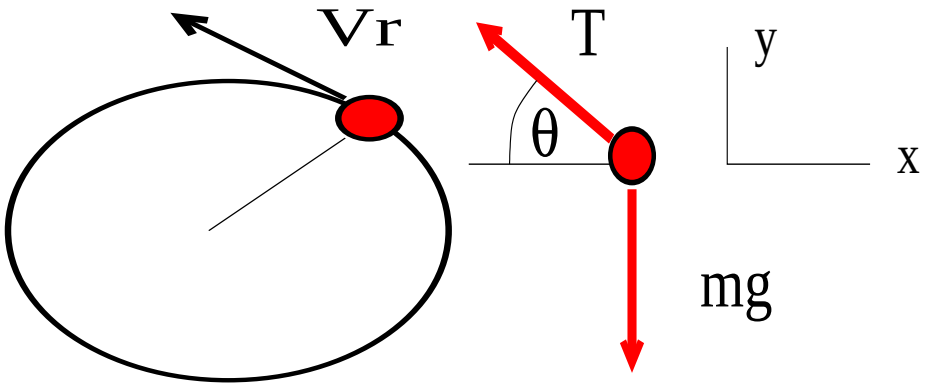

Figura 4: (a) Voleadora (vista de arriba). (b) Diagrama de Fuerzas vista desde el lado.

Problema: Supongamos que sabemos que nuestro auto es capaz de dar una curva de radio L a una velocidad v_d en condiciones secas. Si empieza a llover el coeficiente de fricción estática baja a un cuarto. A que velocidad v_w puedo pasar la curva ahora.
El diagrama de fuerzas se muestra en la Fig. 5a. Las fuerzas son

$$\begin{aligned} ma_r &= f \\ ma_y &= N - mg \end{aligned}$$

Sabemos que el auto no se mueve en la dirección y, por lo tanto $N = mg$. Mientras en la dirección radial la suma de las fuerzas produce una aceleración centrípeta (se mueve en un circulo).

$$m\frac{v_t^2}{L} = f \leq \mu_s N = \mu_s mg \qquad \rightarrow \qquad v_t \leq \sqrt{\mu_s gL}$$

Por lo tanto si el coeficiente de fricción estática baja a un cuarto, podemos pasar la curva a

$$\frac{v_w}{v_d} = \sqrt{\frac{\mu_{s,w}}{\mu_{s,d}}} = \frac{1}{2}$$

por lo tenemos que pasar la curva a la mitad de la velocidad.

Problema: Que cambia si la curva tiene una elevación de $\theta = 10^o$ y $\mu_{s,d} = 1$ como muestra la Fig. 5b.

$$\begin{aligned} ma_r &= f\cos\theta + N\sin\theta \\ ma_y &= N\cos\theta - mg - f\sin\theta \end{aligned}$$

Sabemos que el auto no se mueve en la dirección y (no cambia la altura), por lo tanto $N = mg/\cos\theta + f\tan\theta$. Mientras en la dirección radial la suma de las fuerzas produce una aceleración centrípeta (se mueve en un circulo).

$$m\frac{v_t^2}{L} = f\cos\theta + N\sin\theta = f\frac{1}{\cos\theta} + mg\tan\theta$$

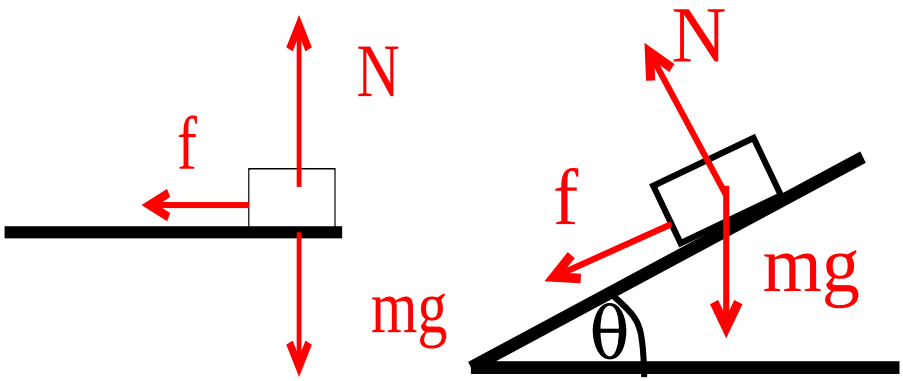

Figura 5: (a) Curva con $\theta = 0$. (b) Curva con θ.

Podemos inmediatamente encontrar que

$$\begin{aligned} N &= gm\cos\theta + \tfrac{mv_t^2}{L}\sin\theta \\ f &= \tfrac{mv_t^2}{L}\cos\theta - mg\sin\theta \end{aligned}$$

Dado que $f \leq \mu_s N$ podemos encontrar que

$$v_t(\theta) \leq \sqrt{gL\frac{\mu_s + \tan\theta}{1 - \mu_s\tan\theta}}$$

Por lo tanto si el coeficiente de fricción estática baja a un cuarto, podemos pasar la curva a

$$\frac{v_w(10^o)}{v_d(10^o)} = 0{,}55$$

Para el caso general, podemos graficar $\frac{v_w}{v_d}$ como función de θ como se muestra en la Fig. 6a. Podemos también calcular la velocidad máxima para pasar la curva con respecto a la velocidad máxima para $\theta = 0$, como función de θ,

$$\frac{v_t(\theta)}{v_t(0)} = 1{,}19$$

para diferentes valores de μ_s como se muestra en la Fig. 6b. Notemos que la velocidad máxima empieza a disminuir después de cierta velocidad. Cuidado!

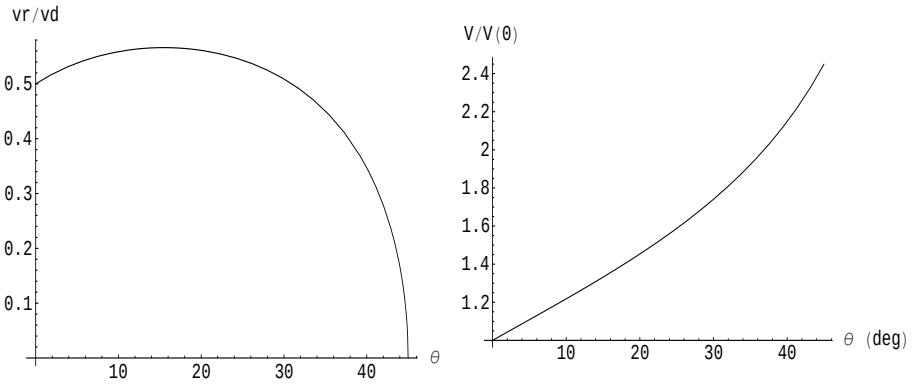

Figura 6: (a) Curva de v_w/v_d como función de $\theta = 0$. (b) $v_t(\theta)/v_t(0)$ para $\mu_s = 0{,}5$.

3. Fuerzas de Roce

Las fuerza de roce del aire (o en un medio cualquiera, como agua, etc) sobre un cuerpo que se mueve a velocidad $\vec{v}$ tiene magnitud

$$F_r = -b|v|^{n-1}v$$

y es en la dirección que se opone al movimiento. Donde n generalmente varia entre 1 o 2, dependiendo de la velocidad de cuerpo en cuestión. Pero generalmente se considera que n es constante.

Por ejemplo, supongamos que n=1 y tenemos un cuerpo que cae desde una altura h. Describamos el movimiento. Asumamos que el movimiento es en una dimensión, y las fuerzas sobre el cuerpo es

$$ma = -mg - bv$$

donde hemos asumido que el cuerpo esta cayendo cosa que la fuerza de roce se opone al movimiento. Inicialmente cuando la velocidad es baja, $|v| << mg/b$, la fuerza de roce no es importante y el

cuerpo cae como sin roce. A medida que la velocidad se hace mas negativa la fuerza de roce aumenta (la aceleración disminuye) hasta que el cuerpo llega a una velocidad terminar (cuando las dos fuerzas se cancelan y la aceleración es cero). Para tiempos mayores la velocidad de caída es constante y se denomina **velocidad terminal** y tiene magnitud

$$v_t = -mg/b$$

Por esto pareciera que los cuerpos mas livianos caen mas lento.

Problema: Dado que existe la fuerza de roce del aire, los cuerpos toman mas tiempo en subir, bajar, o igual?

Miremos el diagrama de fuerza de la Fig. 7a. Podemos observar que cuando el cuerpo sube las dos fuerzas, gravedad y roce, se opone al movimiento con lo cual la fuerza neta sobre el cuerpo es

$$F_s = -mg - |F_r|$$

mientras que cuando el cuerpo baja, una fuerza es positiva y la otra negativa, por lo tanto la fuerza neta cuando baja

$$F_b = -mg + |F_r|$$

es menor que cuando sube. Por lo tanto el cuerpo se demora mas en bajar que en subir. Esto esta relacionado también con la velocidad terminal.

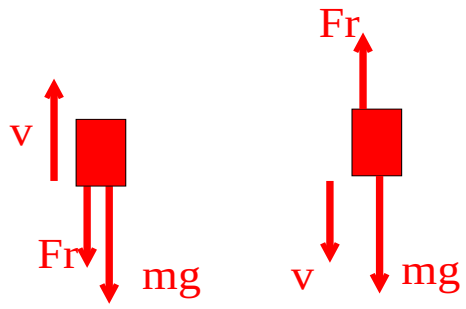

Figura 7: (a) Diagrama de Fuerzas con roce del aire.

4. Apéndice I: Movimiento circular

Entendamos un poco mejor este concepto de aceleración centrípeta y tangencial.

4.1. Velocidad angular constante

Supongamos que tenemos la siguiente trayectoria circular

$$\vec{r}(t) = r_o \cos \omega t \widehat{i} + r_o \sin \omega t \widehat{j}$$

Podemos calcular la velocidad como

$$\vec{v}(t) = \omega r_o \hat{t}$$

y la aceleración como

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \hat{r}$$

que es precisamente la aceleración centrípeta con magnitud

$$|a| = \frac{v^2}{r_o}$$

4.2. Velocidad angular variable

Supongamos ahora que la velocidad angular esta cambiando y tenemos $\theta(t)$

$$\vec{r}(t) = r_o \cos \theta(t) \widehat{i} + r_o \sin \theta(t) \widehat{j}$$

Utilizando la siguiente relación de calculo (mirar apéndice III)

$$h[t] = \frac{df(t)}{dt} \qquad \rightarrow \qquad \frac{df[g(t)]}{dt} = h[g(t)] \frac{dg(t)}{dt}$$

podemos derivar que

$$\vec{v} = -r_o \frac{d\theta}{dt} \left(-\sin \theta \widehat{i} + \cos \theta \widehat{j} \right)$$

Tiene precisamente la dirección tangencial, dado que el vector

$$\hat{t} = -\sin \theta \widehat{i} + r_o \cos \theta \widehat{j}$$

es el vector tangente al circulo. La aceleración la podemos calcular como

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -r_o \left(\tfrac{d\theta}{dt} \right)^2 \left(\cos \theta \widehat{i} + \sin \theta \widehat{j} \right) \\ &+ r_o \tfrac{d^2\theta}{dt^2} \left(-\sin \theta \widehat{i} + \cos \theta \widehat{j} \right) \end{aligned}$$

El primer termino es exactamente la fuerza centrípeta radial

$$a_c = \frac{v_t^2}{r_o}$$

dado que la magnitud de la velocidad tangencial es

$$v_t = r_o \frac{d\theta}{dt}$$

El segundo termino es la aceleración en la dirección tangencial, y la podemos describir como

$$\frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt}\left[r_o \frac{d\theta}{dt}\right] = r_o \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

En termino de vectores unitarios radiales y tangenciales

$$\begin{aligned} \widehat{r} &= \cos\theta\widehat{i} + \sin\theta\widehat{j} \\ \widehat{t} &= -\sin\theta\widehat{i} + \cos\theta\widehat{j} \end{aligned}$$

tenemos

$$\vec{a} = -\frac{v_t^2}{r_o}\widehat{r} + \frac{dv_t}{dt}\widehat{t}$$

o también podemos escribirla como

$$\vec{a} = -r_o\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 \widehat{r} + r_o\frac{d\theta}{dt}\widehat{t}$$

5. Apéndice II: Métodos de Integración numérica

Dado que la velocidad instantánea y la aceleración instantánea son derivadas, podemos aproximar una solución numérica de la velocidad y la posición. Es decir, si sabemos la posición $x_n = x(n\Delta t)$ y la velocidad $v_n = v(t + \Delta t)$ podemos encontrar la posición y la velocidad un Δt mas tarde, asumiendo que la velocidad y la aceleración son aproximadamente constante en ese intervalo Δt, e iguales a $v(t) = v_n$ y $a(t) = a_n$ respectivamente. Así tenemos que la posición y velocidad al final de ese intervalo están relacionadas con la posición y velocidad al comienzo del intervalo como

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x\left[(n+1)\Delta t\right] &= x_n + v_n\Delta t \\ v_{n+1} = v\left[(n+1)\Delta t\right] &= v_n + a_n\Delta t \end{aligned}$$

Este es el método de Euler. Claramente, mientras mayor sea Δt mas grande va a ser nuestro error numérico. Claro que tampoco queremos hacer Δt muy pequeño porque tomaría demasiado tiempo hacer el calculo y tendría demasiado errores de aproximación numérica (acordemonos que los computadores usan cierta precisión en sus cálculos). Es el método mas simple para integrar trayectorias. El método mas usado se llama Runge-Kutta donde el error que se comete en un intervalo es extremadamente pequeño.

Problema: Supongamos que tenemos un cuerpo de $m = 1$ kg, que lanzamos desde el suelo con una velocidad de $v_o = 30$ m/s. Tenemos una fuerza de fricción

$$F_r = bv$$

con $b = 0{,}75$. Estime, usando $\Delta t = 0{,}1$ al altura a la cual llega, y el tiempo que se demora en subir y en bajar.

La solución la encontramos en el archivo de excel y el gráfico en la Fig. 8a-b. Vemos en este ejemplo, que el cuerpo se demora mas tiempo en bajar que en subir.

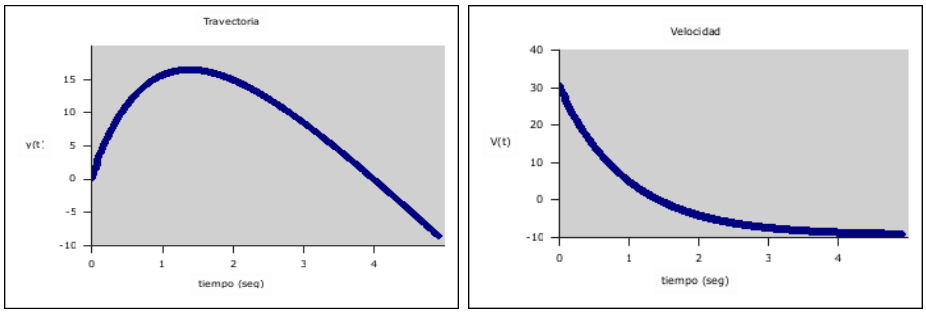

Figura 8: (a) Posición. (b) Velocidad