Capítulo 5: Energía y Trabajo

Índice

1. Producto Escalar de Vectores

Podemos definir varios productos entre vectores. Veremos el producto escalar de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (mas adelante definiremos el producto vectorial entre dos vectores). EL producto escalar entre dos vectores se define como

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre los vectores como se muestra en la Fig. 1a. Como podemos observar:

1. el producto escalar es la multiplicación de la magnitud del vector $\vec{A}$ con la proyección del vector $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$.

2. también, el producto escalar es la multiplicación de la magnitud del vector $\vec{B}$ con la proyección del vector $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$

Algunas propiedades de la multiplicación de vectores es:

1. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, entonces $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

2. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, entonces $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$

3. Si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, entonces $\vec{A} = 0$, o $\vec{B} = 0$, o$\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares.

4. $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$

5. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

6. $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$. Ver Fig. 1c.

De hecho ya hemos usado el producto escalar de dos vectores cuando escribimos los componentes de un vector

$$\vec{A} \cdot \widehat{i} = \left[A_x\widehat{i} + A_y\widehat{j} + A_z\widehat{j}\right] \cdot \widehat{i} = A_x$$

como la fuerza, con respecto a los vectores unitarios

$$\vec{A} = A_x\widehat{i} + A_y\widehat{j} = A\cos\theta\widehat{i} + A\sin\theta\widehat{j}$$

lo que ahora podemos escribir como (ver Fig. 1b)

$$\vec{A} = (\vec{A} \cdot \widehat{i})\widehat{i} + (\vec{A} \cdot \widehat{j})\widehat{j}$$

Podemos ahora definir el producto escalar de dos vectores en termino de sus componentes

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left[A_x\widehat{i} + A_y\widehat{j} + A_z\widehat{j}\right] \cdot \left[B_x\widehat{i} + B_y\widehat{j} + B_z\widehat{j}\right] = A_xB_x + A_yB_Y + A_zB_Z$$

Porque todos los vectores unitarios son perpendiculares entre si.

El producto escalar se puede usar en varias aplicaciones.

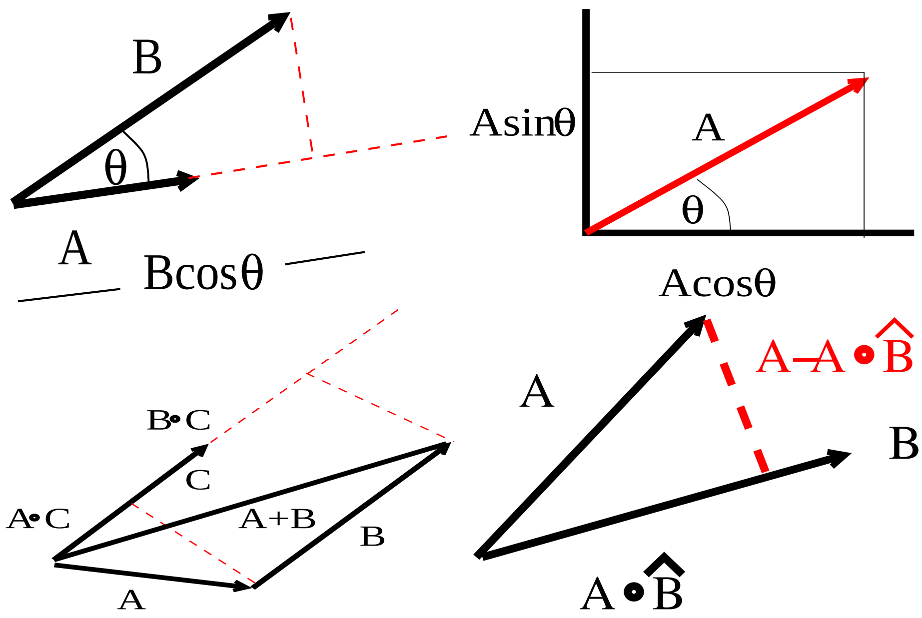

Figura 1: (a) Producto escalar dos vectores. (b) Proyección de un vector en termino de vectores unitarios. (c) El producto escalar con una suma de vectores. (d) Descomponer un vector $\vec{A}$ en los componentes paralelos y perpendiculares a otro vector $\vec{B}$.

1. Podemos descomponer un vector $\vec{A}$ en sus proyecciones paralelas y perpendiculares a $\vec{B}$. Esto es

$$\vec{A} = \vec{A}_{\parallel} + \vec{A}_{\perp}$$

   Con esta definición tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{\parallel} &= \left(\vec{A}\cdot\widehat{B}\right)\widehat{B} \\ \widehat{A}_{\perp} &= A - \left(\vec{A}\cdot\widehat{B}\right)\widehat{B} \end{aligned}$$

2. Podemos encontrar el ángulo entre dos vectores tomando el producto escalar. Estos es

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}\sqrt{\vec{B}\cdot\vec{B}}}$$

   Aquí podemos utilizar la descomposición en componentes en direcciones unitarias.

Problema: Tenemos que diseñar una montaña rusa con un carro que de la vuelta a un loop como se observa en la Fig. 2a. Como podemos calcular la velocidad de entrada $v_t(\theta = 0) = v_o$ que necesitamos imponer para que funcione.

En este caso los rieles generan un fuerza normal al riel sobre el carro (en el sistema inercial del suelo), Fig. 2b.

$$\begin{aligned} ma_x &= -N\cos\theta + f\sin\theta \\ ma_y &= -N\sin\theta - mg - f\cos\theta \end{aligned}$$

En termino de vectores unitarios radiales y tangenciales

$$\begin{aligned} \widehat{r} &= \cos\theta\widehat{i} + \sin\theta\widehat{j} \\ \widehat{t} &= -\sin\theta\widehat{i} + \cos\theta\widehat{j} \end{aligned}$$

podemos calcular la aceleración en la dirección radial como

$$m\frac{v_t^2}{R} = ma_r = -m\vec{a}\cdot\widehat{r} = -ma_x\cos\theta - ma_y\sin\theta = N + mg\sin\theta$$

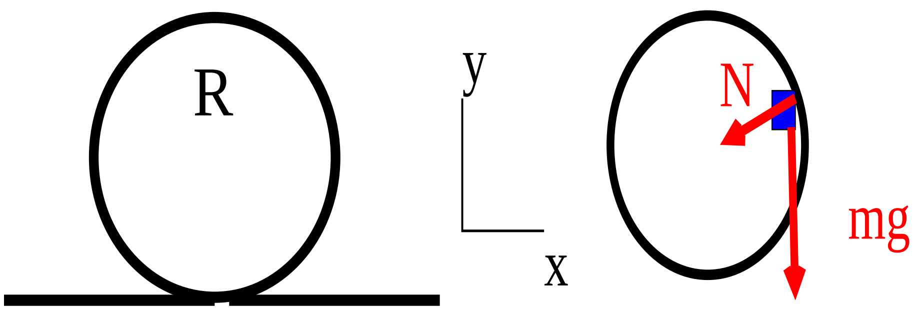

Figura 2: (a) Montaña rusa. (b) Fuerzas en θ.

De la misma forma podemos calcular la aceleración tangencial como

$$m\frac{dv_t}{dt} = m\vec{a}\cdot\widehat{t} = ma_x\sin\theta + ma_y\cos\theta = -f - mg\cos\theta$$

con $f = \mu_r N$. Por lo tanto a un ángulo θ tenemos una velocidad dada por $v_t(\theta)$ y podemos encontrar fácilmente la fuerza

$$N = m\frac{v_t^2(\theta)}{R} - mg\sin\theta$$

Y entonces podemos calcular

$$R\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dv_t(\theta)}{dt} = -\mu_k\left(\frac{v_t^2(\theta)}{R} - g\sin\theta\right) - g\cos\theta$$

porque el radio R es constante. Por lo tanto

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu_r\left(\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 - \frac{g}{R}\sin\theta\right) - \frac{g}{R}\cos\theta$$

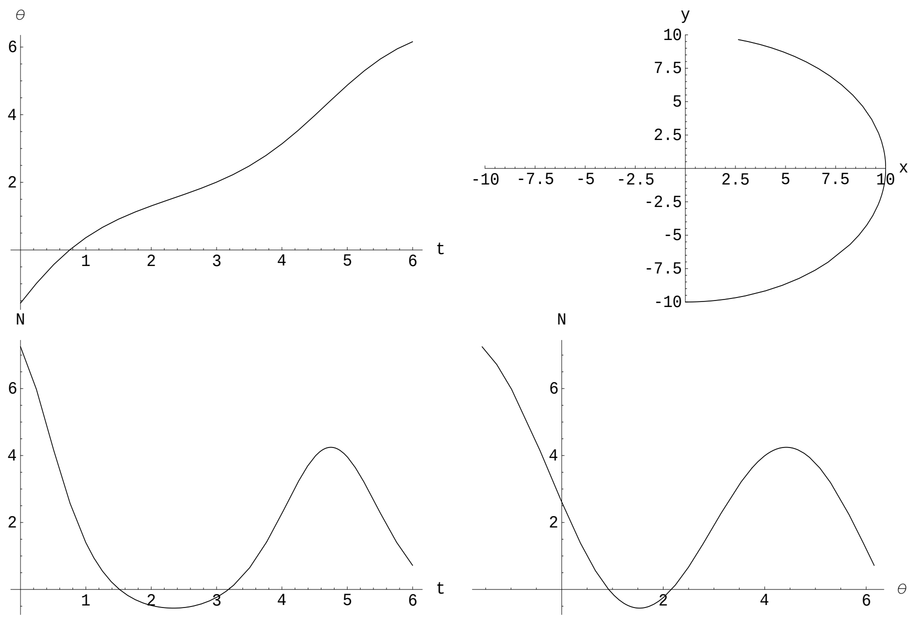

Figura 3: Usando $R = 10$ m, $v_o = 25$ m/s, $\theta_o = -\pi/2$ (a) $\theta(t)$, (b) x vs y. (c) N(t), (d) N vs θ. Nos damos cuenta que el cuerpo se cae en $\theta \sim 2\pi$.

Esta es una ecuación difícil de resolver analíticamente, pero puede ser resuelta numéricamente como se muestra en la Fig. 3.

Problema: Escribamos la ecuación de movimiento de péndulo. En el sistema de referencia del eje del péndulo tenemos

$$\begin{aligned} ma_x &= -N\sin\theta \\ ma_y &= N\cos\theta - mg \end{aligned}$$

En términos de θ tenemos que la posición del péndulo se puede escribir como

$$\vec{r} = L\sin\theta\hat{i} - L\cos\theta\hat{j}$$

usando esta descripción tenemos que

$$\vec{a} = -L\omega^2\hat{r} - \alpha\hat{t}$$

Ahora proyectamos la aceleración a estos dos vectores

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sin\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j} \\ \hat{t} &= \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \end{aligned}$$

y por lo tanto la ecuación de movimiento es

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

Una solución se muestra en la Fig. 4

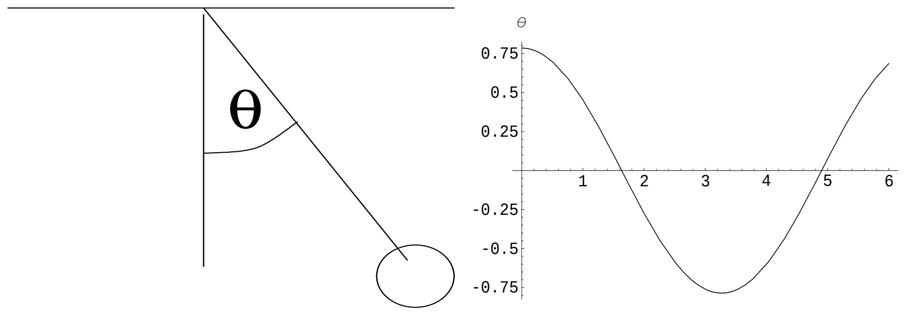

Figura 4: (a) Péndulo. (b) $\theta(t)$.

2. Trabajo y energía

Ya hemos visto varios ejemplos (dos poleas, sacar un auto del pantano, etc) donde es posible amplificar la fuerza que se aplica.

Esta claro que no podemos obtener "algo por nada". Si la fuerza se amplifica por un factor de dos, como en el caso de las dos poleas, intuitivamente significa que si queremos levantar la masa 1 m, debemos tirar la cuerda una distancia de $\Delta x = 2$ m. Por lo tanto debe de existir alguna cantidad que se conserva en esta situaciones. Vemos que $F\Delta x$ se conserva en estas situaciones, y esta cantidad esta relacionada con el "esfuerzo" o trabajo realizado como veremos ahora.

2.1. Trabajo en una dimensión

Supongamos que tenemos fuerzas constantes en una dimensión. Entonces sabemos que

$$F_{neta} = ma$$

pero si F y a son constante, entonces sabemos que $v^2 - v_o^2 = 2a\Delta x$, por lo tanto

$$ma\Delta x = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2$$

1. Definimos la **energía cinética** como

$$KE = \frac{1}{2}mv^2$$

2. Definamos el **trabajo para una fuerza constante**, como

$$W = ma\Delta x = F_{net}\Delta x$$

3. escribimos el **teorema energía-trabajo para una fuerza constante en una dimensión** como

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = W$$

El trabajo hecho por la fuerza cambia la energía cinética del cuerpo.

4. Esta relación es muy útil ya que relaciona posiciones con velocidades, y no aparece el tiempo. Es una forma equivalente de escribir la **segunda ley de Newton**

Problema: Calcule el trabajo necesario para levantar una masa m una altura h usando la maquina de Atwood con una y dos poleas (mirar capitulo anterior).

Para el caso de una polea necesitábamos ejercer una fuerza $F = mg$ para levantar la masa. Para levantar la masa una altura h necesitamos mover la cuerda una distancia $\Delta y = h$. Por lo tanto

$$W_1 = F\Delta y = mgh$$

Para el caso de dos polea necesitábamos ejercer una fuerza $F = mg/2$ para levantar la masa. Pero para levantar la masa una altura h necesitamos mover la cuerda una distancia $\Delta y = 2h$. Por lo tanto

$$W_1 = F\Delta y = mgh$$

Por lo tanto vemos que el trabajo hecho para levantar la masa es la misma. Esto tiene relación con el principio de conservación de energía que veremos mas adelante.

Esta relación también se puede derivar directamente de la **2da ley de Newton** en una dimensión dándonos cuenta que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\frac{dv}{dt} = v\ ma$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = vF_{net} = v\sum_i F_i$$

Si integramos en el tiempo esta expresión desde t_o a t (con $v(t_o) = v_o$), tenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = \int_{t_o}^{t} F_{net}v dt$$

Notemos que acá aparece la fuerza neta, la que produce la aceleración y el cambio en la energía cinética. En general sabemos que $dx = vdt$ por lo tanto el teorema

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = \int_{x_o}^{x} F_{net}dx \tag{1}$$

Este es el **teorema de trabajo energía generalizado en una dimensión**

1. Para el caso especial tenemos una fuerza constante

$$F_{net} = const \qquad \rightarrow \qquad \int_{xo}^{x} F_{net}dx = F_{net}\Delta x$$

tenemos el resultado anterior

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = F_{net}\Delta x$$

2. Para el caso de la fuerza de gravedad (cerca de la tierra) y un sistema de referencia en donde la fuerza de gravedad es negativa, tenemos

$$\int_{yo}^{y} F_{net}dx = \int_{yo}^{y} (-mg)dy = -mg\Delta y$$

3. Para el caso de una masa sobre la cual ejerce una fuerza un resorte tenemos que el trabajo que se ejerce sobre la masa es

$$\int_{xo}^{x} F_{net}dx = -\int_{xo}^{x} k(x-x_e)dx = -\frac{1}{2}k(x-x_e)^2 + \frac{1}{2}k(x_o-x_e)^2$$

donde x_e es el punto de equilibrio del resorte.

4. Esta es una forma de re-escribir las ecuaciones de movimiento, pero donde el tiempo no aparece explícitamente.

5. Cuando tenemos mas de un cuerpo tenemos que ser cuidados. Tenemos que ser muy cuidadosos sobre que fuerzas actúan sobre cada cuerpo. Ver esto mas tarde.

Problema: Encuentre la altura máxima que llega un proyectil que parte de la tierra con velocidad inicial v_o.

Este es un caso en el cual no necesitamos saber el tiempo, necesitamos relacionar velocidad con distancia, por lo tanto podemos utilizar el teorema de arriba, donde la única fuerza es la de gravedad

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = -mg(y_f - y_o)$$

y como la altura máxima sucede cuando $v = 0$, entonces

$$mgy_f = \frac{1}{2}mv_o^2 \qquad \rightarrow \qquad y_f = \frac{1}{2g}v_o^2$$

2.2. Trabajo en 2 y 3 dimensiones

Para el caso mas general cuando el desplazamiento es vectorial o las fuerzas producen aceleraciones que no son constantes podemos también escribir un teorema de trabajo-energía. Pero primero necesitamos estudiar la derivada del producto vectorial

$$\begin{aligned} \tfrac{d\vec{A}\cdot\vec{B}}{dt} &= \tfrac{d}{dt}\left[A_xB_x + A_yB_y + B_xB_y\right] \\ &= A\cdot\tfrac{d\vec{B}}{dt} + B\cdot\tfrac{d\vec{A}}{dt} \end{aligned}$$

Esto va a ser muy útil cuando escribamos el teorema del trabajo-energía, ya que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}v^2\right] = \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Si multiplicamos por la masa tenemos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = \vec{v}\cdot\vec{F}$$

donde F es la fuerza. Si integramos en el tiempo, tenemos

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_o|^2 = \int_{t_o}^{t_f}\vec{F}\cdot\vec{v}dt = \Delta W$$

Donde el ultimo termino se denomina el trabajo realizado ΔW. Definimos

$$KE = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$$

como la energía cinética. Por lo tanto la relación de arriba establece que el cambio de la energía cinética se produce por el trabajo realizado por las fuerzas en la dirección del desplazamiento. Es posible transformar esta ultima integral dándonos cuenta que el producto $\vec{v}dt = d\vec{r}$, con $\vec{r}$ como la trayectoria ejecutada por la partícula. Entonces

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_o|^2 = \int_{\vec{r}o}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{2}$$

donde se entiende que el cuerpo tiene velocidad $\vec{v}$ en la posición x, y $\vec{F}$ es la suma de todas la fuerzas.

1. Vemos inmediatamente que si una fuerza es perpendicular a la trayectoria de la partícula, entonces esta no cambia su energía cinética. Se dice que la fuerza no hace trabajo. Por ejemplo la fuerza normal es generalmente perpendicular al desplazamiento y por lo tanto no ejerce trabajo, osea, no cambia la energía cinética del cuerpo.

2. El trabajo es independiente del sistema de referencia inercial que utilicemos mientras este sea un sistema inercial. Esto se debe a que los productos escalares de vectores tienen el mismo valor en todos los sistemas de referencia.

3. Para el caso de fuerzas constantes y una trayectoria en linea recta tenemos el resultado

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_o|^2 = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}$$

como es el caso del plano inclinado pero con desplazamiento vectorial.

Es constructivo mirar el siguiente problema.

Problema: Tenemos una masa m en un plano inclinado de largo L, como se muestra en la Fig. 5a. Asumamos que el cuerpo lo dejamos deslizarse desde la parte mas alta del plano. Encuentre todas las fuerzas y vea cuales hacen trabajo (cambian la energía cinética del cuerpo). Encuentre la velocidad de la masa en el suelo.

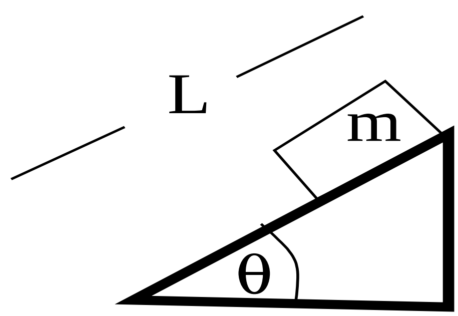

Figura 5: (a) Plano inclinado.

Tomemos el diagrama de fuerza en el sistema de referencia que se muestra en la Fig. 6a. Podemos escribir todas las fuerzas en forma vectorial como

$$\begin{aligned}\vec{N} &= N\widehat{j}\\ \vec{F}_g &= -mg\sin\theta\widehat{i} - mg\cos\theta\widehat{j}\\ \vec{f}_k &= \mu_k N\end{aligned}$$

Utilizando las leyes de Newton sabemos que

$$\begin{aligned}ma_x &= -mg\sin\theta + \mu_k N\\ ma_y &= N - mg\cos\theta\end{aligned}$$

Dado que $a_y = 0$ tenemos que $N = mg\cos\theta$. Dado que el desplazamiento es

$$d\vec{r} = dx\hat{i}$$

podemos calcular el trabajo hecho por cada una de las fuerzas

$$
\begin{aligned}
\vec{N} \cdot d\vec{r} &= 0 \\
\vec{F}_g \cdot d\vec{r} &= -mg\sin\theta dx \\
\vec{f} \cdot d\vec{r} &= \mu_k mg\cos\theta dx
\end{aligned}
$$

y por lo tanto la normal no hace trabajo. Todas estas fuerzas son constantes

$$
\begin{aligned}
\int_{x_o}^{x_f} \vec{N} \cdot d\vec{r} &= 0 \\
\int_{x_o}^{x_f} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} &= -mg\sin\theta(x_f - x_o) \\
\int_{x_o}^{x_f} \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \mu_k mg\cos\theta(x_f - x_o)
\end{aligned}
$$

Ahora podemos utilizar el teorema de trabajo-energía para obtener

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_o|^2 = -mg(x_f - x_o) + \mu_k mg\cos\theta(x_f - x_o)$$

las condiciones son $x_o = L$, $x_f = 0$, $v_o = 0$, por lo tanto obtenemos

$$v_f^2 = 2gL(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

Tomemos el diagrama de fuerza en el sistema de referencia que se muestra en la Fig. 6b. Podemos escribir todas las fuerzas en forma vectorial como

$$
\begin{aligned}
\vec{N} &= -N\sin\theta\hat{i} + N\cos\theta\hat{j} \\
\vec{F}_g &= -mg\hat{j} \\
\vec{f}_k &= \mu_k N\cos\theta\hat{i} + N\sin\theta\hat{j}
\end{aligned}
$$

Utilizando las leyes de Newton sabemos que

$$
\begin{aligned}
ma_x &= -N\sin\theta - \mu_k N\cos\theta \\
ma_y &= N\cos\theta - mg + N\sin\theta
\end{aligned}
$$

Dado que el cuerpo no puede cruzar el plano necesitamos que $N = mg\cos\theta$ (mirar los problemas de arriba). Dado que el desplazamiento es

$$d\vec{r} = ds\cos\theta\hat{i} + ds\sin\theta\hat{j}$$

podemos calcular el trabajo hecho por cada una de las fuerzas

$$
\begin{aligned}
\vec{N} \cdot d\vec{r} &= 0 \\
\vec{F}_g \cdot d\vec{r} &= -mg\sin\theta ds \\
\vec{f} \cdot d\vec{r} &= \mu_k mg\cos\theta ds
\end{aligned}
$$

y por lo tanto la normal no hace trabajo. Todas estas fuerzas son constantes

$$
\begin{aligned}
\int_{x_o}^{x_f} \vec{N} \cdot d\vec{r} &= 0 \\
\int_{x_o}^{x_f} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} &= -mg\sin\theta(s_f - s_o) \\
\int_{x_o}^{x_f} \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \mu_k mg\cos\theta(s_f - s_o)
\end{aligned}
$$

donde s representa el movimiento sobre el plano inclinado. Ahora podemos utilizar el teorema de trabajo-energía para obtener

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_o|^2 = -mg(s_f - s_o) + \mu_k mg\cos\theta(s_f - s_o)$$

las condiciones son $s_o = L$, $s_f = 0$, $v_o = 0$, por lo tanto obtenemos

$$v_f^2 = 2gL(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

igual que en el otro sistema de referencia inercial.

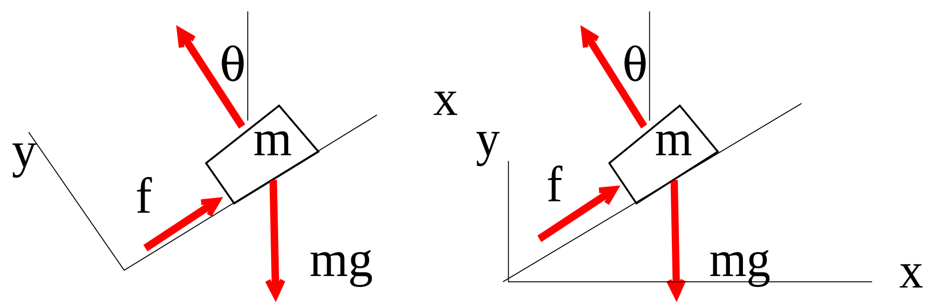

Figura 6: Diagrama de Fuerzas usando dos sistemas de referencias.

2.3. Fuerzas conservativas y Energía potencial

Tomemos varios esquiadores que van del punto A al punto B pero siguiendo varias trayectorias, como se ve en la Fig. 7a. Para cualquier desplazamiento tenemos

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

tenemos que la única fuerza que hace trabajo es la gravedad y el trabajo hecho por la gravedad en este pequeño desplazamiento es

$$F \cdot d\vec{r} = \left(-mg\hat{j}\right) \cdot \left(dx\hat{i} + dy\hat{j}\right) = -mgdy$$

Dada una trayectoria cualquiera podemos sumar pequeños desplazamientos y obtener

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\int_{y_A}^{y_B} mgdy = -mg(y_B - y_A)$$

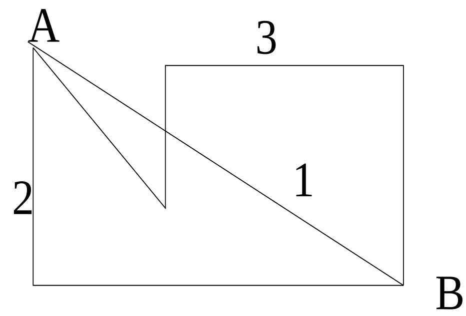

Figura 7: (a) Varias trayectorias bajo la fuerza de gravedad.

Vemos que solo depende de la diferencia en altura de la trayectoria, independiente de la ruta que tomó. Podemos entonces definir un función que llamaremos energía potencial gravitatoria como

$$U_g(y) = mgy \qquad \rightarrow \qquad W_g = -\left(U(y) - U(y_o)\right)$$

Vemos que para esta fuerza el trabajo hecho dependo solo de la posición inicial y final, es independiente del camino recorrido.

Cuando esto sucede decimos que se puede definir un potencial $U(\vec{r})$ y re-escribir la relación trabajo-energía pasando el potencial al lado izquierdo como

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = -\left[U(\vec{r}) - U(\vec{r}_o)\right]$$

para obtener

$$\left[\frac{1}{2}mv_f^2 + U(\vec{r}_f)\right] - \left[\frac{1}{2}mv_o^2 + U(\vec{r}_o)\right] = 0$$

con lo cual definimos la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) \qquad \rightarrow \qquad E_f = E_i$$

Vemos que al utilizar la energía potencial, si esta existe, nos ahorramos el problema de hacer la integral de trabajo para esta fuerza en diferentes trayectorias, ya que esta integral se hizo de una vez por todas, y fue incluida como parte de la energía.

Lo siguiente es equivalente:

1. Existe una energía potencial
2. El trabajo realizado por la fuerza es independiente del camino recorrido
3. La fuerza es conservativa
4. el trabajo realizado en todo camino cerrado es cero (porque $\vec{r}_f = \vec{r}_o$ y entonces $U_f = U_o$).

Problema: A unos ingenieros se les ocurrió hacer un túnel entre Nueva York y Londres (esta separados en longitud $2\theta_o \sim 60^o$) en linea recta pasando por la tierra, como se ve en la Fig. 8a. Encuentre la velocidad en el punto mas bajo, con y sin fricción. Sugerencia: escriba todo en termino del ángulo θ_o y asuma que la fuerza de gravedad se mantiene constante (veremos mas adelante que cambio si esto no es verdad).

Utilizando el diagrama de fuerzas de la Fig. 8b (asumiendo que la fricción es cero) podemos utilizar conservación de la energía para resolver este problema (usemos el centro de la tierra como sistema de referencia):

$$E_f = E_o \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv_f^2 + mgR\cos(\theta_o) = mgR$$

Notemos que en el punto mas bajo el ángulo es θ_o. Por lo tanto tenemos

$$v_f = \sqrt{2gR\left(1 - \cos\theta_o\right)}$$

Notemos que podríamos haber calculado el trabajo hecho por la gravedad directamente

$$W = \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}_f} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

El componente de la gravedad en la dirección del desplazamiento es

$$\vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -mg\sin\theta dy$$

donde

$$\tan\theta = \frac{y}{R\cos\theta_o} \qquad \rightarrow \qquad dy = R\cos\theta_o \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

Por lo tanto

$$\int_{R\sin\theta_o}^{0} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -mgR\cos\theta_o \int_{\theta_o}^{0} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta = mgR(1 - \cos\theta_o)$$

Finalmente obtenemos

$$v_f = \sqrt{2gR\left(1 - \cos\theta_o\right)}$$

Que es el mismo resultado anterior. Pero notemos que el método de potenciales es mucho mas directo en este caso.

Problema: Muestre que el resorte da origen a una energía potencial.

El trabajo esta dado por

$$\int_{x_i}^{x_f} [-k(x - x_e)]dx = -\frac{1}{2}k(x_f - x_e)^2 + \frac{1}{2}k(x_i - x_e)^2$$

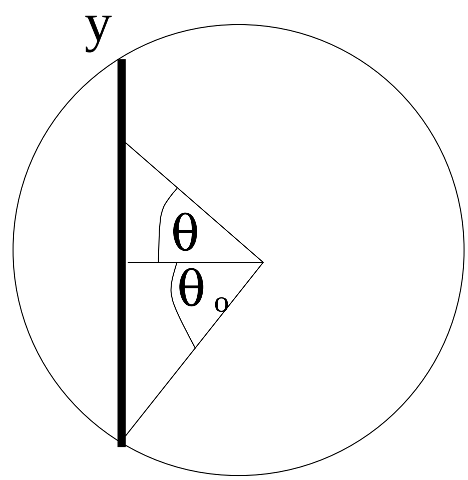

Figura 8: Túnel entre Nueva York y Londres.

con lo que definimos la energía potencial del resorte como

$$U_r(x) = \frac{1}{2}k(x - x_e)^2$$

Nuevamente esta energía potencial se puede incluir con la energía cinética y con la energía gravitatoria. De esta forma vemos que la energía potencial es una forma de almacenar energía que luego puede ser convertida en energía cinética.

Problema: Tomemos el péndulo de largo L. Si soltamos el péndulo desde el ángulo $\theta = \pi/2$. Cuando vale la velocidad angular como función del ángulo.

En este caso podemos usar conservación de la energía como

$$\begin{aligned} E_o &= mgL \\ E_\theta &= \tfrac{1}{2}mv^2 + mgh = \tfrac{1}{2}mL^2\omega^2 + mgL(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}\cos\theta}$$

y por lo tanto la máxima rapidez angular se da para $\theta = 0$.

Problema: En un plano inclinado de ángulo $\theta = 45^o$ tenemos un resorte (con $k = 200$ N/m) y una masa $m = 10kg$ como se ve en la Fig. 9a. Comprimimos este resorte y la masa una distancia $\Delta s = x_e - x_o = 5$ m y luego dejamos ir a la masa. Cual es la velocidad al llegar al tope del plazo que tiene un largo de $L = 10$ m desde el punto de equilibrio del resorte? Cual es la velocidad la llegar al suelo?

Podemos utilizar conservación de la energía, la cual incluye energía cinética, energía potencial gravitacional, y energía potencial del resorte. Utilizando el sistema de referencia de la figura podemos relacionar la energía inicial

$$E_o = \frac{1}{2}mv_o^2 + mgy_o + \frac{1}{2}k(x_o - x_e)^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}k\Delta s^2$$

con la energía al tope del plano

$$E_t = \frac{1}{2}mv_t^2 + mgy_t = \frac{1}{2}mv_t^2 + mg(L + \Delta s)\sin\theta$$

Notemos que el resorte no hace trabajo al final del plano inclinado y por esto no fue incluida en la energía al tope. Utilizando que las energías son iguales tenemos

$$E_o = E_t \qquad \rightarrow \qquad v_t = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta s^2 - 2g(L + \Delta s)\sin\theta} = 17{,}1 m/s$$

Notemos que no toda la energía potencial del resorte se convirtió en energía cinética, ya que algo se tenia que transformar en energía potencial gravitacional.
Potemos utilizar conservación de la energía nuevamente y encontrar la magnitud de la velocidad en el suelo

$$E_t = \frac{1}{2}mv_t^2 + mg(L + \Delta s)$$

y

$$E_s = \frac{1}{2}mv_s^2 + 0$$

por lo que obtenemos

$$v_s = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta s^2} = 22{,}36 m/s$$

Dado que sabemos que el componente $v_x = v_{x,t} = v_t\cos\theta = 12{,}1$ m/s, podemos obtener $v_y = \sqrt{v_s^2 - v_x^2} = 18{,}81$ m/s.

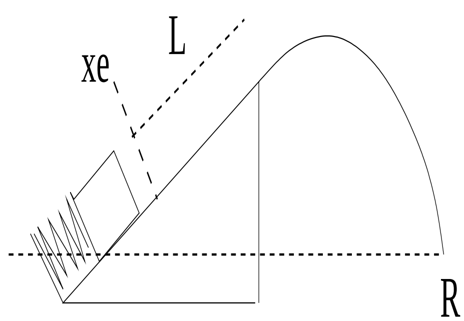

Figura 9: Problema del resorte y el plano inclinado.

2.4. Fuerzas no-conservativas y conservación de la energía

En general tenemos fuerzas que no son conservativas, esto es, que no solo dependen de la posición inicial y final, pero también depende del camino recorrido. Por ejemplo, si tomamos el esquiador en las diferentes trayectoria de la Fig. 9a e incluimos la fricción, entonces el trabajo hecho por la fricción en estas diferentes trayectorias, que conectan el mismo punto inicial con el mismo punto final, es diferente. El trabajo hecho por la fricción dependen del camino recorrido. La fuerza de fricción no es conservativa

Por lo tanto, si tenemos N_c fuerzas conservativas tal que

$$U_i(\vec{r}_f) - U_i(\vec{r}_o) = -\int_o^f F_i^C(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

y N_{nc} fuerzas no conservativas. Entonces podemos escribir el teorema general de energía-trabajo como

$$\left[\frac{1}{2}mv_f^2 + \sum_i^{N_c} U_i(\vec{r}_f)\right] - \left[\frac{1}{2}mv_o^2 + \sum_i^{N_c} U_i(\vec{r}_o)\right] = \sum_i^{N_{nc}} \int_o^f F_i^{NC}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Podemos definir la energía mecánica como

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \sum_i^{N_c} U_i(\vec{r})$$

y re-escribir el principio de conservación de energía como

$$E_f - E_i = \sum_i^{N_{nc}} \int_o^f F_i^{NC}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

el cual establece que el cambio de energía mecánica se produce por el trabajo hecho por las fuerzas no conservativas.

Problema: Incluyamos en el problema del plano inclinado con resorte la fricción, con $\mu_k = 1$. Como cambia el problema.

Ahora tenemos que incluir la disipación de la energía por la fricción, usando $N = mg\cos\theta$, encontramos que

$$E_f - E_o = -\mu_k N \Delta x = -\mu_k mg(L + \Delta s)\cos\theta$$

porque f es constante. Finalmente

$$v_t = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta s^2 - 2g(L+\Delta s)\sin\theta - \mu_k 2g\cos\theta(L+\Delta s)} = 8{,}7m/s$$

Notemos que todas las fuerzas conservativas fueron incluidas en la energía E. Potemos utilizar conservación de la energía nuevamente y encontrar la magnitud de la velocidad en el suelo (ahora no actúa la fricción)

$$v_s = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta s^2 - \mu_k 2g\cos\theta(L+\Delta s)} = 16{,}96m/s$$

Dado que sabemos que el componente $v_x = v_{x,t} = v_t\cos\theta = 6{,}15$ m/s, podemos obtener $v_y = \sqrt{v_s^2 - v_x^2} = 15{,}8$ m/s.

Problema: Que pasa si incluimos fricción en el problema del túnel entre NY y Londres?

En este caso la diferencia de energía es

$$E_f - E_o = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgR(1-cos\theta_o) = \int \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

Notemos que no hay un aceleración centrípeta ya que la trayectoria no es curva, es una linear recta con respecto al centro de la tierra. Tenemos que mirar las fuerzas y los desplazamientos y tenemos que $N = mg\cos\theta$ (se opone al componente normal de la gravedad). Notemos que podemos escribir

$$\tan\theta = \frac{y}{R\cos\theta_o} \qquad \rightarrow \qquad dy = R\cos\theta_o\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

y por lo tanto

$$\vec{f}\cdot d\vec{r} = -\mu_k N dy = -\mu_k mgR\cos\theta_o\frac{1}{\cos\theta}d\theta$$

y

$$-\mu_k mgR\cos\theta_o\int_{\theta_o}^{0}\frac{1}{\cos\theta}d\theta = -\frac{2\mu_k mgR\cos\theta_o}{\theta_o}\tanh^{-1}\left[\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)\right]$$

Por lo tanto la diferencia de energía es entonces

$$\Delta E = \int \vec{f}\cdot d\vec{r} = -\frac{2\mu_k mgR\cos\theta_o}{\theta_o}\tanh^{-1}\left[\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)\right]$$

Y la velocidad final es

$$v_f = \sqrt{2gR\left[(1-\cos\theta_o) - 4\mu_k\frac{\cos\theta_o}{\theta_o}\tanh^{-1}\left[\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)\right]\right]}$$

Notemos que para $\mu_k = 0$ recuperamos el resultado anterior.

3. Energía y Fuerzas en una dimensión

En una dimensión podemos establecer una relación bastante interesante entre energía potencial y fuerza. Dado que

$$U(x) - U(x_o) = -\int_{x_o}^{x} F dx$$

vemos inmediatamente que

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}$$

siempre y cuando la fuerza sea conservativa. Con esta observación podemos mirar el concepto de equilibrio.

Miremos el gráfico de $U(x) = k(x - x_e)^2/2$ para un resorte de la Fig. 10a. Utilizando la conservación de la energía tenemos

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E_o = constante$$

Dado que la velocidad necesita ser positiva, necesitamos

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_o - U(x) \geq 0$$

Por lo tanto la trayectoria se desarrolla siempre y cuando $U(x) \leq E_o$. Por lo tanto el movimiento es permitido para energías E_1, E_2, pero no para E_3. Para la energía E_1 el movimiento es oscilatorio entre los puntos x_{min} y x_{max} donde la velocidad es cero. Para le energía E_2 no hay movimiento ya que $U(x_e) = E_o$, y por lo tanto $v = 0$. Este punto es un punto de equilibrio, y ocurre precisamente en un mínimo de U, lo que corresponde a un punto donde la fuerza es cero

$$U_{min} \qquad \rightarrow \qquad F = -\frac{dU(x)}{dx} = 0$$

En este caso el punto de equilibrio es estable porque cualquier perturbación pequeña genera pequeñas oscilaciones alrededor del punto de equilibrio que no crecen con el tiempo. Esto se puede ver porque la fuerza siempre empuja hacia le punto de equilibrio. La fuerza restituye el equilibrio. Este es un mínimo de potencial, por lo tanto un punto de equilibrio estable satisface

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = 0$$
$$\frac{dU^2(x)}{dx^2} < 0$$

Existen otras situaciones como la de la Fig. 10b, donde existen tanto un máximo como un mínimo del potencial. Para E_1 la trayectoria se mueve entre x_{min} y x_{max}. Para E_2 el cuerpo tenemos varias posibilidades.

1. Si partimos desde $x < x_0$, entonces la trayectoria se mueve en el pozo izquierdo hasta que eventualmente llega al punto x_0 y se queda allí.
2. Si partimos desde $x > x_0$, entonces la trayectoria se mueve en el pozo derecho hasta que eventualmente llega al punto x_0 y se queda allí.
3. Si partimos de la condición $U(x_0) = E_2$, entonces $v = 0$. Estamos en un punto de equilibrio, pero este punto de equilibrio es inestable, ya que una pequeña perturbación no permanece pequeña, pero se agranda con el tiempo. Esto se puede ver al observar que cerca de x_0 la fuerza empuja alejándose del punto de equilibrio inestable x_0. La razón es que es un máximo y por lo tanto tenemos un punto de equilibrio inestable si

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = 0$$
$$\frac{dU^2(x)}{dx^2} > 0$$

4. Los dos puntos de equilibrio estables x_1 y x_2 ya fueron discutidos anteriormente.

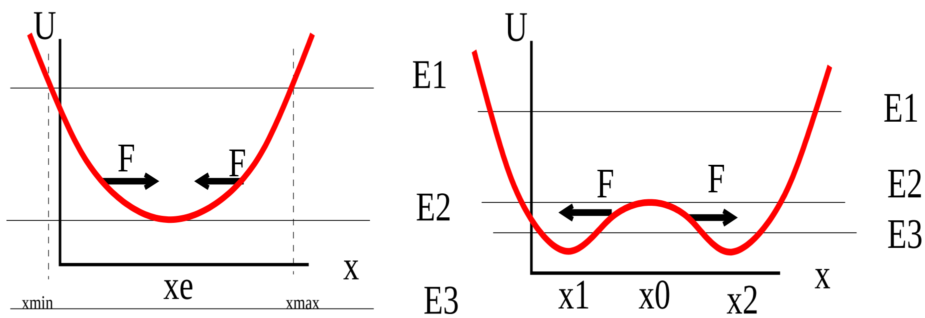

Figura 10: (a) Potencial del resorte (b) Potencial con mínimos y máximos.

4. Otras Formas de energía

Existen otras formas de energía. Por ejemplo, cuando actúa la fricción un porcentaje de esa energía se va en el aumento de la temperatura del cuerpo y el resto en el aumento de la temperatura del plano inclinado y atmósfera. El aumento de esta temperatura se podría en principio utilizar luego y transformarle en energía cinética, por lo tanto podría ser incluida en el principio de conservación de energía como una energía interna del cuerpo

$$E = \left[\frac{1}{2}mv_f^2 + \sum_i^{N_c} U_i(\vec{r}_f)\right] + E_{interna} + E_{quimica} + E_{otras}$$

En la relación de otras, podemos incluir energía relativista donde $\Delta E = \Delta mc^2$, energía de niveles atómicos, etc.

4.1. Evolución Estelar

4.2. Cuantización de energía

5. Relación trabajo energía para varios cuerpos

Para el caso de varias partículas, tenemos que tener cuidado. Si escribimos un teorema de energía-trabajo para cada cuerpo tenemos

$$\frac{1}{2}m_1 v_f^2 - \frac{1}{2}m_1 v_o^2 = \sum_i \int_o^f \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_1 + \int_o^f \vec{F}_{2,1} \cdot d\vec{r}_1$$

$$\frac{1}{2}m_2 v_f^2 - \frac{1}{2}m_2 v_o^2 = \sum_i \int_o^f \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_2 + \int_o^f \vec{F}_{1,2} \cdot d\vec{r}_2$$

donde hemos separado las fuerzas externas de las fuerzas de acción-reacción. Si sumamos las dos ecuaciones tenemos un principio de energía-trabajo par dos cuerpos. Nosotros sabemos que $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$, pero no podemos decir que

$$\int_o^f \vec{F}_{1,2} \cdot d\vec{r}_2 + \int_o^f \vec{F}_{2,1} \cdot d\vec{r}_1 = 0$$

a menos que los desplazamientos sean iguales. Si los trabajos hechos por las fuerzas acción-reacción totalizan cero, entonces se puede considerar los dos cuerpos como uno. Esto funciona por ejemplo para el caso de dos cuerpos que se mueven juntos, ya que en este caso $d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2$.

Problema: Supongamos que tenemos dos masas que se mueven juntas en un superficie con fricción, $\mu_k = 1$ como se muestra en la Fig. 11a. Cual es la velocidad luego de recorrer una distancia de $\Delta x = 5$ m, donde $\vec{F} = 5\widehat{i} + 5\widehat{j}$, $m_1 = 10$ kg y $m_2 = 5$ kg.

Claramente la fuerza no es lo suficientemente grande como levantar los cuerpos ya que para la masa 1 en la dirección y tenemos

$$ma_{1y} = 0 = N + F_y - m_1 g$$

y N es positiva. Dado que los cuerpos se mueven juntos podemos utilizar el teorema energía-trabajo y escribir

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_o^2 = F_x \Delta x - \mu_k(m_1 g + m_2 g - F_y)\Delta x$$

entonces

$$v_f = \sqrt{\Delta x \left[2\frac{F_x + \mu_k F_y}{m_1 + m_2} - 2g\mu_k\right]}$$

Problema: Supongamos que tenemos las dos masas en el plano inclinado como se muestra en la Fig. 11b. Supongamos que $m_2 > m_1$. Encuentre la velocidad cuando la masa m_2 llega al suelo. El largo de la cuerda y el plano inclinado es L. La masa m_1 parte del suelo.

Si utilizamos las leyes de Newton para este problema (el cual fue resuelto antes) tenemos

$$a = g\frac{m_2 - m_1 \sin\theta}{m_1 + m_2}$$

y por lo tanto la velocidad en el suelo de la masa m_2 luego de caer una distancia $L\sin\theta$ es

$$v_f^2 - v_o^2 = 2a\Delta h \qquad \rightarrow \qquad v_f^2 = 2gL\sin\theta\frac{m_2 - m_1\sin\theta}{m_1+m_2}$$

Si resolvemos este problema por conservación de energía, debemos primero observar que el trabajo que realiza la fuerza de interacción entre las masas, en este caso la tensión T, tiene la misma magnitud para los dos cuerpos pero de signo opuesto

$$W_1(i \rightarrow f) = T\Delta x_1 = -T\Delta y_2 = -W_2(i \rightarrow f)$$

Por lo tanto el principio de energía-trabajo solo incluye el trabajo hecho por las fuerzas externas, en este caso la gravedad. Esta fuerza es conservativa y puede ser incluida en la energía mecánica

$$E_o = \frac{1}{2}m_1 v_{1,o}^2 + mgh_{1,o} + \frac{1}{2}m_2 v_{2,o}^2 + mgh_{2,o} = m_2 gL\cos\theta$$

$$\begin{aligned} E_f &= \tfrac{1}{2}m_1 v_{1,f}^2 + mgh_{1,f} + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2 + mgh_{2,f} \\ &= \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2 + m_1 gL\cos^2\theta \end{aligned}$$

Las dos masas se mueven juntas, y por lo tanto la magnitud de sus velocidades son las mismas $v_{1,f}^2 = v_{2,f}^2 = v_f^2$. La altura de m_1 es $h_{1,f} = L\cos^2\theta$. De esto obtenemos

$$v_f = \sqrt{\frac{2gL\cos\theta(m_2 - m_2\cos\theta)}{m_1+m_2}}$$

Que cambia si incluimos fricción en el plano inclinado?

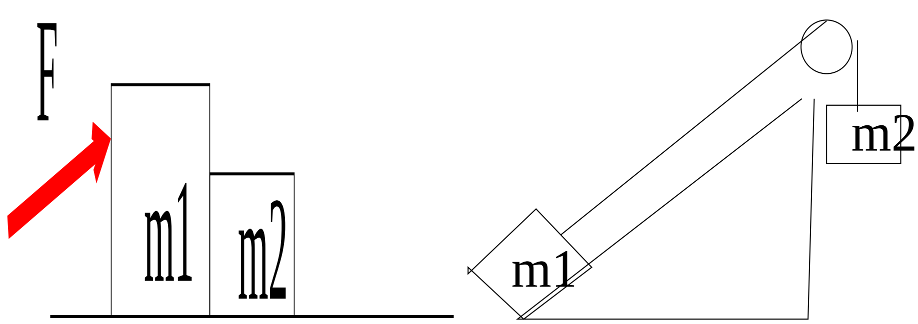

Figura 11: (a) Dos masa juntas (b) Dos masas en plano inclinado