

Capítulo 6: Centro de masa y Momento

Índice

1. Centro de Masa	2
2. Dinámica de varias partículas	4
2.1. Medir el centro de masa experimentalmente	13
3. Colisiones	14
3.1. colisiones en una dimensión	16
3.2. colisiones en 2 dimensiones	18
3.3. Masas puntuales vs finitas	19
3.4. colisiones en el centro de masa	20
4. Apéndice I: Masas variables y el problema del cohete	26
5. Apéndice II: Descripción microscópica de roce	29

1. Centro de Masa

Definamos el concepto de centro de masa como

$$M\vec{r}_{com} = \sum_i m_i \vec{r}_i \quad (1)$$

como la suma pequeñas masa m_i . Aquí $M = \sum_i m_i$. Si tomamos una esfera de densidad constante, intuitivamente sabemos que el centro de masa esta en su centro de simetría.

Problema Calculemos el centro de masa de dos masas puntuales $m_1 = 5$ kg y $m_2 = 10$ kg ubicados en $\vec{r}_1 = 3\hat{i} + 3\hat{j}$ y $\vec{r}_2 = 8\hat{i} + 5\hat{j}$ respectivamente, como se observa en la Fig. 1a.

El centro de masa entonces es

$$\begin{aligned} 15\vec{r}_{com} &= 5(3\hat{i} + 3\hat{j}) + 10(8\hat{i} + 5\hat{j}) \\ \vec{r}_{com} &= \frac{19}{3}\hat{i} + \frac{7}{3}\hat{j} \end{aligned}$$

lo que demuestra que esta en la linea entre $vecr_1$ y $vecr_2$, pero mas cerca de $vecr_2$ ya que este tiene mas masa.

También podemos hacer el calculo con distribuciones continuas de masa

$$M\vec{r}_{com} = \int \vec{r} dm$$

donde dm depende del problema.

Problema Calculemos el centro de masa de una cuerda de densidad uniforme como se observa en la Fig. 1b.

Si tomamos cada pequeño intervalo de la cuerda, este intervalo tiene masa

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

y por lo tanto el centro de masa (el cual claramente esta sobre el eje x) es

$$Mx_{com} = \int x dm = \int_0^L x \frac{M}{L} dx = \frac{ML}{2}$$

Lo cual es obvio ya que sabemos que $x_{com} = L/2$.

Problema Calculemos el centro de masa del triángulo invertido donde su borde tiene una ecuación $y = ax$, y una altura $y = b$ como se observa en la Fig. 1c

La masa del triángulo es

$$M = \rho b 2(b/a)/2$$

donde ρ es la masa por unidad de área la cual es constante, $2b/a$ es la base, y b la altura. En este caso el centro de masa esta sobre el eje y ($x_{com} = 0$). En un intervalo dy tenemos un rectángulo de base $x = 2y/a$ y altura dy , por lo tanto la masa de este pequeño rectángulo es

$$dm = \rho \frac{y}{a} dy$$

y por lo tanto el centro de masa esta es

$$M y_{com} = \int y dm = \int_0^b 2y \rho \frac{y}{a} dy = \rho \frac{2b^3}{3a}$$

entonces

$$y_{com} = \frac{2}{3}b$$

Dada la formula del centro de masa Ec. 1, vemos que si descomponemos un objeto en dos objetos mas simples, como se muestra en la Fig. 1d, a los cuales les sabemos su centro de masa, entonces podemos ver que podemos separar la sumatoria en dos sumatorias, una para cada objeto, como

$$M \vec{r}_{com} = \sum_{Obj1} m_i \vec{r}_i + \sum_{Obj2} m_i \vec{r}_i$$

$$M \vec{r}_{com} = m_1 \vec{r}_{com,1} + m_2 \vec{r}_{com,2}$$

por lo tanto se puede escribir en termino de la posición del centro de masa de los objetos mas simples.

Problema Calcule el centro de masa del cuerpo de la Fig. 1d

Vemos que podemos separar este cuerpo en un cuadrado con posición

$$\vec{r}_c = \frac{L}{2} \hat{i} + \frac{L}{2} \hat{j}$$

y un triángulo, de altura $h = L/2$, con centro de masa

$$\vec{r}_t = \left(\frac{L/2}{+} \frac{L}{4} \right) \hat{i} + \left(L + \frac{L}{6} \right) \hat{j}$$

Si asumimos una masa por unidad de área ρ uniforme, entonces tenemos que las masa son

$$m_c = \rho L^2$$

$$m_t = \rho \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{L}{2} = \rho \frac{L^2}{8}$$

donde $M = 9\rho L^2/8$. Por lo tanto el centro de masa de cuerpo completo es

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{8}L^2\rho\right) \vec{r}_{com} &= \rho L^2 \left(\frac{L}{2}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j}\right) + \rho \frac{L^2}{8} \left(\frac{3L}{4}\hat{i} + \frac{7L}{4}\hat{j}\right) \\ &= \rho L^3 \left(\frac{19}{32}\hat{i} + \frac{23}{32}\hat{j}\right) \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\vec{r}_{com} = \frac{19}{36}L\hat{i} + \frac{23}{36}L\hat{j}$$

lo cual tiene sentido dada la forma del objeto.

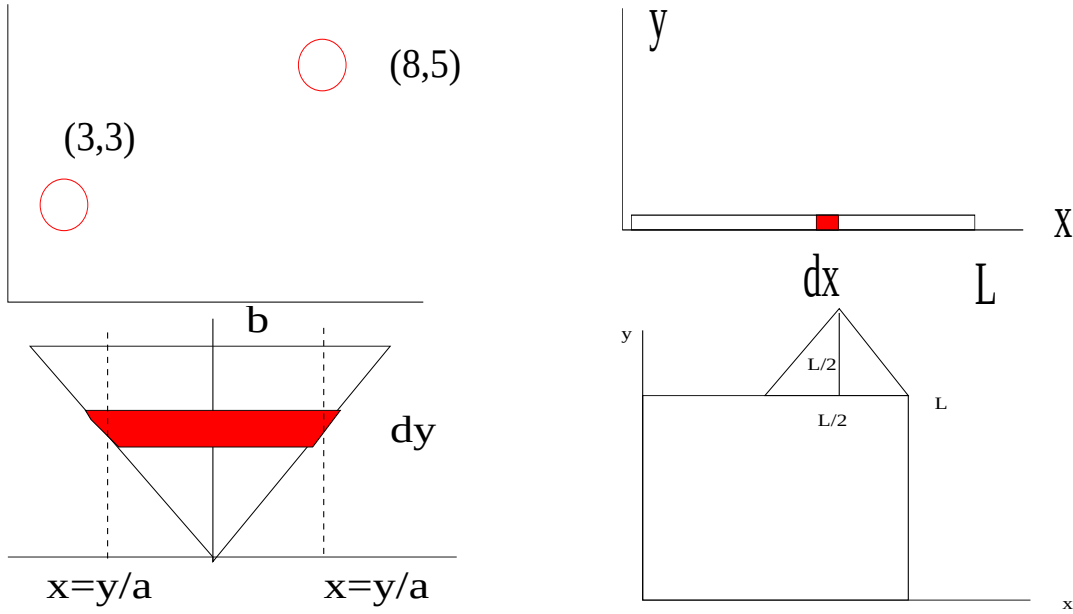


Figura 1: (a) Centro de masa de dos masa puntuales. (b) Centro de masa de una cuerda. (c) Centro de masa de un rectángulo. (d) Centro de masa de objeto compuesto.

2. Dinámica de varias partículas

Supongamos que tenemos varias partículas, o un cuerpo complicado, entonces podemos tomarle una derivada temporal al centro de masa para obtener su velocidad

$$M\vec{v}_{com} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

También podemos encontrar la aceleración del centro de masa tomando otra derivada para obtener

$$M\vec{a}_{com} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

Notemos que cada masa m_i siente una fuerza $\vec{F}_i$, la cual podemos separar en una fuerza externa y la fuerza que siente de las otras partículas, esto es

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_j \vec{F}_{i,j}$$

Por lo tanto el centro de masa se mueve con

$$M\vec{a}_{com} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j}$$

Pero nosotros sabemos que las fuerzas entre partículas viene en pares de acción-reacción, por lo tanto

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j} = 0$$

y

$$M\vec{a}_{com} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

La aceleración del centro de masa es producido solo por la suma de las fuerzas externas.

Por ejemplo, si tenemos un cuerpo solido, como un martillo, que lanzamos por el aire, podemos calcular la trayectoria del centro de masa como el movimiento parabólico de una masa puntual donde

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = - \sum_i m_i g \hat{j} = -g \hat{j} \sum_i m_i = -Mg \hat{j}$$

Este problema ya fue resuelto en capítulos anteriores. Este movimiento solo describe al centro de masa, no describe por ejemplo la rotación del martillo. No es lo mismo que el martillo caiga con la cabeza hacia adelante que con la cabeza hacia atrás. Esta lo veremos en el próximo capítulo.

Problema Supongamos que tenemos un bote de largo L y masa m_b en el agua, con una persona de masa m_p sobre el bote como se muestra en la Fig. 2a. La persona decide cambiarse de lado del bote, como se observa en la Fig. 2b. Cuanto se mueve el bote con respecto al agua.

Tomemos el sistema de referencia que se observa en la Fig. 2a. Primero notemos que si no hay fricción con el agua, podemos decir que la fuerzas externas en la dirección x son cero. Notemos que no podemos garantizar esto para el eje y , porque tenemos la fuerza que ejerce el agua sobre el bote y le permite flotar Por lo tanto

$$v_{com,x} = const$$

Pero sabemos que inicialmente el bote y la persona no se están moviendo, por lo tanto $v_{com,x} = 0$ y entonces

$$x_{com} = const \quad \rightarrow \quad x_{com,i} = x_{com,f}$$

Podemos ahora escribir que inicialmente

$$(m_p + m_b)x_{com,i} = m_p x_{p,i} + m_b x_{b,i} = m_b \frac{L}{2}$$

ya que el centro de masa del bote esta en la posición $L/2$. De la misma forma al final tenemos

$$(m_p + m_b)x_{com,f} = m_p x_{p,f} + m_b x_{b,f}$$

Tenemos un problema acá, porque tenemos dos valores que resolver y una sola ecuación. La segunda ecuación se obtiene al darse cuenta que la persona camina desde $-L/2$ a $+L/2$ con respecto al bote. Re-definamos las variables como variables $x^f_p, A = x_{p,f}$ y $x^f_{b,A} = x_{b,f}$ con respecto al agua, por lo tanto tenemos que plantear una ecuación de movimiento relativo para la persona con respecto al bote

$$x^f_{p,A} = x^f_{p,b} + x^f_{b,A}$$

donde la persona al final esta en la posición, relativa al centro de masa del bote,

$$x^f_{p,b} = +L/2$$

De aquí podemos resolver por

$$x^f_{p,A} = \frac{L}{2} + x^f_{b,A}$$

insertar en la ecuación para el centro de masa

$$(m_p + m_b)x^i_{com,A} = m_b \frac{L}{2} = m_p \left(\frac{L}{2} + x^f_{b,A} \right) + m_b x^f_{b,A} = (m_p + m_b)x^f_{com,A}$$

y podemos finalmente resolver

$$x^f_{b,A} = \frac{L}{2} \frac{m_b - m_p}{m_p + m_b}$$

Si el bote y la persona tiene la misma masa, entonces el bote se movió al origen. Por el otro lado si el bote es un transatlántico, entonces el bote no se mueve ($m_b \rightarrow \infty$).

Problema Supongamos que tenemos una persona de masa m_p que esta al final de una balsa de largo L y masa m amarrada al muelle, como se ve en la Fig. 3a. Un gracioso suelta la amarra. Al darse cuenta de esto la persona empieza a caminar hacia el muelle con velocidad vp con respecto

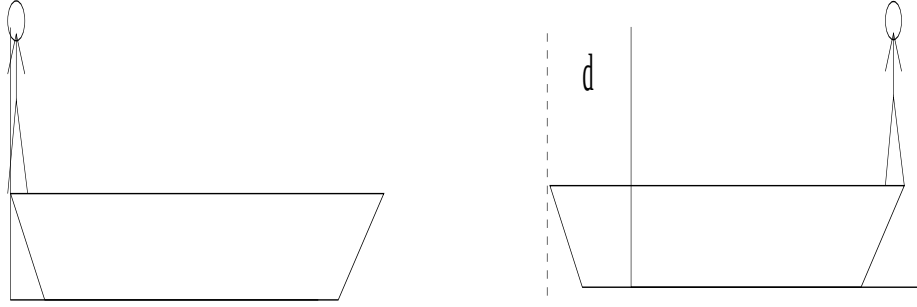


Figura 2: (a) Bote mas persona antes. (b) Bote mas persona después

a la balsa. Calcule la velocidad de la balsa y la energía cinética del sistema? Al llegar al final de la balsa la persona se detiene. A cuanto esta la persona del muelle? Con que velocidad tiene que saltar (asumiendo $\theta = 45^\circ$) para llegar al muelle? Que velocidad adquiere la balsa?

Nuevamente, tenemos que en la dirección x no hay fuerzas externas (lo mismo no se puede decir de la dirección y), por lo tanto el componente x de la velocidad del centro de masa es constante. Nada se esta moviendo inicialmente, por lo tanto

$$v_{com,i} = 0 = x_{com,f}$$

Cuando la persona esta caminado hacia el muelle, tenemos que

$$(m_p + m_b)v_{com,i} = 0 = m_p v_{p,m}^c + m_b v_{b,m}^c = (m_p + m_b)v_{com,c}$$

donde las velocidades son con respecto al muelle mientras camina. Sabemos que la persona camina con respecto al bote, por lo tanto tenemos un problema de movimiento relativo nuevamente, y podemos relacionar

$$v_{p,m}^c = v_{p,b}^c + v_{b,m}^c = -v_c + v_{b,m}^c$$

Poniendo esta relación arriba, podemos relacionar

$$0 = m_p v_{p,m}^c + m_b v_{b,m}^c = m_p (-v_c + v_{b,m}^c) + m_b v_{b,m}^c$$

y encontrar

$$\begin{aligned} v_{b,m}^c &= \frac{m_p}{m_p + m_b} v_c \\ v_{p,m}^c &= -v_c + \frac{m_p}{m_p + m_b} v_c = -\frac{m_b}{m_p + m_b} v_c \end{aligned}$$

Por lo tanto la persona se acerca al muelle. La energía cinética del sistema es ahora

$$KE = \frac{1}{2} m_p (v_{p,m}^c)^2 + \frac{1}{2} m_b (v_{b,m}^c)^2 = \frac{v_c^2}{2} \frac{m_p m_b}{m_p + m_b}$$

Esta energía cinética es energía química que genera la persona al caminar. Uno siente como tiene que empujar la balsa cuando camina.

Que podemos decir sobre la posición del centro de masa? Dado que inicialmente nada se esta moviendo, tenemos que $v_{com,x} = 0$, y por lo tanto

$$x_{com} = const \quad \rightarrow \quad x_{com,i} = x_{com,f}$$

Podemos ahora escribir que inicialmente

$$(m_p + m_b)x_{com,i} = m_p x_{p,i} + m_b x_{b,i} = m_p L + m_b \frac{L}{2}$$

con respecto al muelle. De la misma forma al final tenemos

$$(m_p + m_b)x_{com,f} = m_p x_{p,m}^f + m_b x_{b,m}^f$$

donde las posiciones son con respecto al muelle. Tenemos un problema acá, porque tenemos dos valores que resolver y una sola ecuación. La segunda ecuación se obtiene al darse cuenta que la persona camino desde $L/2$ a $-L/2$ con respecto a la balsa. Tenemos que plantear una ecuación de movimiento relativo para la persona con respecto a la balsa

$$x_{p,m}^f = x_{p,b}^f + x_{b,m}^f$$

donde la persona al final esta en la posición, relativa al centro de masa del bote,

$$x_{p,b}^f = -L/2$$

De aquí podemos resolver por

$$x_{p,m}^f = -\frac{L}{2} + x_{b,m}^f$$

insertar en la ecuación para el centro de masa

$$m_p L + m_b \frac{L}{2} = m_p \left(-\frac{L}{2} + x_{b,m}^f \right) + m_b x_{b,m}^f$$

y podemos finalmente resolver

$$\begin{aligned} x_{b,m}^f &= \frac{\frac{L}{2} m_b + 3m_p}{m_p + m_b} \\ x_{p,m}^f &= -\frac{L}{2} + \frac{\frac{L}{2} m_b + 3m_p}{m_p + m_b} = \frac{L}{2} \frac{2m_p}{m_p + m_b} \end{aligned}$$

Sabemos que la persona tiene que hacer un salto para llegar al muelle, este salto debería ser con una velocidad ($\theta = 45^\circ$)

$$R = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\theta = \frac{L}{2} \frac{2m_p}{m_p + m_b}$$

y por lo tanto resolvemos que

$$v_o = \sqrt{\frac{gL}{2} \frac{2m_p}{m_p + m_b}}$$

Dado que la velocidad del centro de masa es constante (e igual a cero) tenemos que

$$0 = m_p v_{p,m} + m_b v_{b,m}$$

Notemos que esta relación es solo para el componente x de la velocidad,

$$v_{p,m} = -v_o \cos \theta$$

Por lo tanto la balsa se aleja del muelle con velocidad

$$v_{b,m} = \frac{m_p}{m_b} v_o \cos \theta$$

Que paso con el componente y de la velocidad. Bueno, en esta dirección actúa el agua. Por lo tanto en esta dirección la energía asociada al componente y de v_o fue disipada en olas, etc.

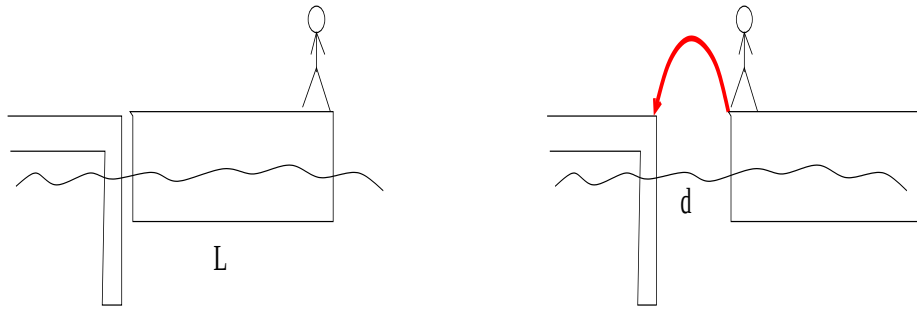


Figura 3: (a) Sistema de interés. (b) Configuración antes de saltar

Problema Supongamos que tenemos una pelota de masa m_p que cae sobre un resorte que esta sujeto a una plataforma de masa m_s que esta sobre una balanza. Calculemos cuando mide la balanza mientras la pelota cae.

Obviamente la balanza mide m_s hasta que la pelota entra en contacto con el resorte. Mirando la aceleración del centro de masa tenemos

$$(m_p + m_s) a_{cm,y} = F_n - (m_s + m_p)g$$

donde F_n es la fuerza de reacción de la balance. Además es lo que mide la balanza. Pero al mismo tiempo tenemos

$$(m_p + m_s) a_{cm,y} = m_p a_p + m_s a_s = m_p a_p$$

Por lo tanto, tenemos

$$F_n = m_p a_p + (m_s + m_p)g$$

Para encontrar a_p hacemos un diagrama de fuerzas (en el sistema inercial) y vemos que las únicas dos fuerzas que actúan sobre m_p son

$$m_p a_p = k\Delta x - m_p g$$

donde Δx es la distancia de compresión. Osea

$$F_n = k\Delta x + m_s g$$

Vemos que si m_p no esta en contacto, $\Delta x = 0$, entonces $F_n = m_s g$. En el lugar de equilibrio donde $\Delta x = m_p g/k$ tenemos $F_n = (m_s + m_p)g$. Si estamos interesados en encontrar la distancia de máxima compresión, podemos usar conservación de energía (notemos que $m_p a_p$ depende de la posición). Entonces

$$\frac{1}{2}m_p v_o^2 + mgh_o = \frac{1}{2}m_p v_f^2 + mgh_f + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

Usando el punto de equilibrio de resorte como origen, tenemos

$$mgh_o = mgh_f + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

Para la máxima compresión tenemos $h_f = -\Delta x$. Por lo tanto

$$\Delta x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + \frac{4h_o}{2kmg}}}{kmg}$$

tomamos la solución positiva.

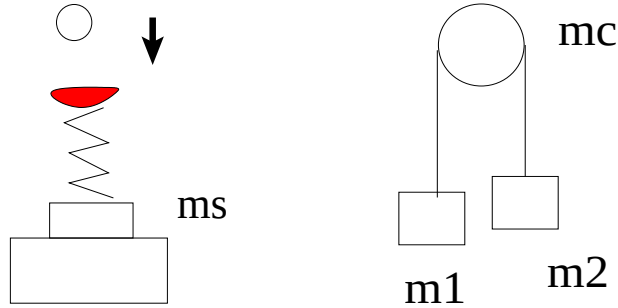


Figura 4: (a) Sistema de interés. (b) Polea

Problema Para el sistema de polea de la Fig. 4b encuentre la aceleración del centro de masa y la fuerza F que mantiene a la polea en su lugar.

Vemos que

$$(m_1 + m_2 + m_c)a_{cm} = m_2 a_2 + m_1 a_1 = (m_2 - m_1)a$$

con $a_2 = -a_1 = a$. usando un diagrama de fuerzas para cada masa tenemos

$$\begin{aligned}
m_c a_c &= F - T_1 - T_2 - m_c g \\
m_1 a_1 &= T_1 - m_1 g \\
m_1 a_2 &= m_2 g - T_2
\end{aligned}$$

Asumiendo que no hay fricción sobre la polea y la masa de la cuerda se cero, entonces $T_1 = T_2 = T$. También $a_c = 0$. Por lo tanto tenemos $F = m_c g + 2T$. Resolviendo tenemos

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

y por lo tanto

$$a_{cm} = g \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_2 + m_1)(m_1 + m_2 + m_c)}$$

y

$$F = (m_1 + m_2 + m_c)(a_{cm} - g)$$

Problema Supongamos que tenemos el problema de un triangulo de masa M que se desliza sin fricción sobre un plano. Sobre este triangulo hay una masa m que se desliza si fricción como se muestra en la Fig. 5a. Encuentre la velocidad final de las masas luego que se separan.

En este caso vemos que no hay disipación y por lo tanto tenemos conservación de energía

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2$$

ya que las dos masas partieron del reposo, claro que m de una altura h . Notemos que las fuerzas de acción-reacción no hacen trabajo ya que son perpendiculares a los desplazamientos.

También tenemos en la dirección x conservación de la velocidad del centro de masa ya que no hay fuerzas en x . Por lo tanto

$$V_{cm,0} = 0 = mv_1 + Mv_2$$

Resolviendo tenemos

$$\begin{aligned}
v_1 &= -\frac{M}{m}v_2 \\
v_2^2 &= \frac{2gh}{\left(\frac{M}{m}\right)^2 + \frac{M}{m}}
\end{aligned}$$

Problema: Supongamos que tenemos la colisión de una masa m_1 con velocidad inicial v_0 contra un resorte que esta pegado a una masa m_2 que esta inicialmente en reposo (mirar Fig. 6a). Cuanto es la distancia de máxima compresión del resorte?

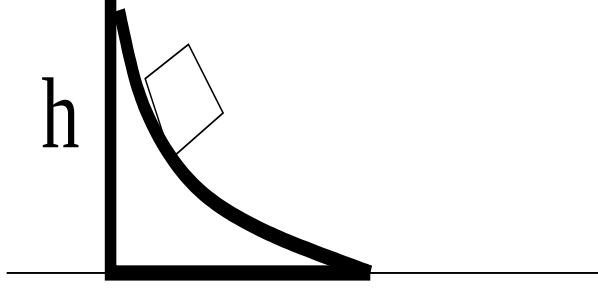


Figura 5: (a) Problema del triángulo

Primero escribamos las fuerzas sobre cada masa en este caso

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= F_{r,1} \\ m_2 a_2 &= F_{r,2} \end{aligned}$$

Cuando el resorte está comprimido, $x_2 - x_1 < L_0$, ejerce fuerzas

$$\begin{aligned} F_{r,1} &= k[(x_2 - x_1) - L_0] \\ F_{r,2} &= -k[(x_2 - x_1) - L_0] \end{aligned}$$

sobre m_1 y m_2 con L_0 la distancia de equilibrio del resorte. Así la fuerza sobre m_1 es hacia atrás y la fuerza sobre m_2 es hacia adelante. Por lo tanto

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= k[(x_2 - x_1) - L_0] \\ m_2 a_2 &= -k[(x_2 - x_1) - L_0] \end{aligned}$$

Sumamos estas dos ecuaciones para obtener

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 a_1 = -m_2 a_2$$

o al integrar

$$m_1(v_{1,f} - v_{1,0}) = -m_2(v_{2,f} - v_{2,0})$$

Definimos $x = x_2 - x_1$ como la distancia relativa entre las dos masas. Para el caso de máxima compresión tenemos que

$$0 = \frac{dx_f}{dt} = v_{2,f} - v_{1,f} \quad \rightarrow \quad v_{2,f} = v_{1,f} = v_f$$

y por lo tanto

$$m_1(v_f - v_0) = -m_2 v_f \quad \rightarrow \quad v_f = v_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Para obtener la distancia de máxima compresión podemos establecer la relación energía-trabajo para cada masa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1v_{1,f}^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 &= \int f_{r,1}dx_1 \\ \frac{1}{2}m_2v_{2,f}^2 - 0 &= \int f_{r,2}dx_2\end{aligned}$$

donde en la derecha aparece el trabajo realizado por el resorte en cada una de las masas. Notemos que $dx_1 \neq dx_2$, por lo tanto la suma de estos trabajos no es cero. Al sumar tenemos

$$\frac{1}{2}m_1v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,f}^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 = \int f_{r,1}dx_1 + \int f_{r,2}dx_2$$

La suma de los dos trabajos la podemos evaluar

$$\begin{aligned}\int f_{r,1}dx_1 + \int f_{r,2}dx_2 &= \int k[(x_2 - x_1) - L_0]dx_1 - \int k[(x_2 - x_1) - L_0]dx_2 \\ &= - \int k[(x_2 - x_1) - L_0]d(x_2 - x_1) \\ &= - \int k[x - L_0]dx \\ &= - \left[\frac{1}{2}k(x_f - L_0)^2 - \frac{1}{2}k(x_0 - L_0)^2 \right]\end{aligned}$$

Dado que inicialmente $v_{1,0} = v_0$ y $v_{2,0} = 0$ tenemos una compresión $x_0 = L_0$, podemos escribir el principio de conservación de energía para las dos masas

$$\frac{1}{2}m_1v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,f}^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 = -\frac{1}{2}k(x_f - L_0)^2$$

utilizando la relación entre las velocidades de arriba, podemos encontrar la máxima compresión como

$$x_f - L_0 = -\frac{v_0}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{m_2m_2}{m_1 + m_2}}$$

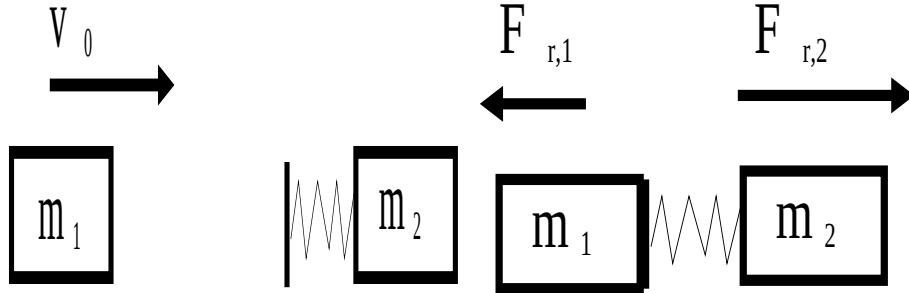


Figura 6: (a) Dos masa colisionando con un resorte como interacción.

2.1. Medir el centro de masa experimentalmente

Podemos medir el centro de masa experimentalmente por analogía. Si tenemos un péndulo puntual, sabemos que la masa m se relajara en el punto mas bajo, es decir el centro de masa del péndulo esta en la linea vertical que use el suelo y el eje, como se observa en la Fig. 7a.

Si la única fuerza que actúa sobre un cuerpo es la gravedad, entonces el potencial que siente el cuerpo es

$$U = \sum_i m_i g h_i = g \sum_i m_i h_i = g M h_{com}$$

entonces que podemos colgar un cuerpo cualquiera de un eje y dado que el centro de masa se comporta como una masa puntual, podemos encontrar que el centro de masa se relajara también a la vertical entre el eje y el suelo. Por lo tanto si tomamos dos ejes, generara dos lineas, como se observa en la Fig. 7b y en la intersección esta el centro de masa



Figura 7: (a) Centro de masa del péndulo (b) Centro de masa objeto complicado

3. Colisiones

Definamos el impulso como

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \Delta \vec{p}$$

con lo cual podemos definir la fuerza promedio como

$$\vec{F}_{av} = \frac{1}{\Delta t} \vec{I}$$

Problema: Supongamos que un jugador de fútbol patea una pelota. Estime la fuerza promedio que ejerce el pie sobre la pelota.

Primero tenemos que estimar con que velocidad sale la pelota. Un buen arquero puede cruzar la cancha $R = 100$ m al patear la pelota. Esto quiere decir que la velocidad inicial luego de patear la pelota fue (asumamos que $\theta = 45^\circ$)

$$R = \frac{v_f^2}{g} \sin 2\theta \quad \rightarrow \quad v_f = \sqrt{Rg} \sim 31 \text{ m/s}$$

El cambio en momento mientras la pelota esta en contacto con el pie del arquero es por lo tanto

$$|I| = |\Delta p| = m_p v_f - m_p v_o = m_p v_f$$

Una pelota de fútbol pesa como $m \sim 1/2$ kg. Para calcular la fuerza necesitamos un Δt . El arquero esta en contacto con la pelota aproximadamente $d = 1/2$ m. Asumiendo aceleración constante, tenemos

$$\Delta t = \frac{d}{v_{av}} = \frac{d}{(v_f + v_i)/2} = \frac{2d}{v_f}$$

Por lo tanto la fuerza promedio es

$$|F_{av}| = \frac{I}{\Delta t} = \frac{m_p v_f^2}{2d} = \frac{m_p R g}{2d} = 500N$$

Consideremos el patear la pelota como una colisión entre el pie del arquero y la pelota. Podemos estimar $\Delta t \sim 2d/v_f = 0,03$ s. Comparemos la fuerza descrita arriba con la fuerza de gravedad

$$|F_g| = m_p g = 5N$$

Por lo tanto durante el intervalo de tiempo en el que sucede la colisión, las otras fuerzas son irrelevantes. Este es un principio besico de colisiones. Es interesante ver que podríamos hacer con esta energía

$$\Delta E = F_{av} d = 250J$$

lo que es suficiente para levantar un auto ($\Delta E = mgh$) una altura $h = 0,02$ m. Claro que de una patada.

durante una colisión podemos considerar como si las fuerzas externas fueran irrelevantes

Obviamente, luego de la colisión (luego de Δt) otras fuerzas empiezan a actuar, y por eso usamos tiro parabólico para encontrar la velocidad inmediatamente después de la colisión.

Dado que podemos considerar las fuerzas externas como irrelevantes durante la colisión, entonces podemos decir que durante la colisión tenemos que

$$M \vec{a}_{com} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} = 0$$

y por lo tanto inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión tenemos

$$M\vec{v}_{com,A} = M\vec{v}_{com,D}$$

esto quiere decir

$$\sum_i m_i \vec{v}_{i,A} = \sum_i m_i \vec{v}_{i,D}$$

La combinación

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

se le denomina **momento** y por lo tanto este principio dictamina que el momento se conserva (**pero solo de inmediatamente antes a inmediatamente después**) de una colisión.

3.1. colisiones en una dimensión

Supongamos que tenemos una colisión en una dimensión entre dos cuerpos. En este caso tenemos

$$m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A} = m_1 v_{1,D} + m_2 v_{2,D}$$

Dado que generalmente sabemos las condiciones iniciales, nos falta una relación, ya que tenemos que resolver por dos variables. En general hay dos límites de interés.

1. **Colisiones completamente inelásticas:** son colisiones donde los dos cuerpos quedan pegados luego de la colisión. Por lo tanto tenemos

$$v_{1,D} = v_{2,D} = \frac{m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A}}{m_1 + m_2} = \frac{p_{tot,A}}{m_1 + m_2}$$

En este caso la energía cinética no se conserva (se pierde en la deformación de los objetos). Para simplificar supongamos que tenemos masas iguales y que $v_{1,A} = 0$

$$\begin{aligned} KE_i &= \frac{1}{2} m_2 v_{2,A}^2 \\ KE_f &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_2 v_{2,A}}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} v_{2,A}^2 \\ \frac{KE_f}{KE_i} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} < 1 \end{aligned}$$

2. **Colisiones elásticas:** En estas colisiones tenemos no solo conservación de momento, pero también conservación de energía cinética (acordémonos que las fuerzas externas no importan durante la colisión). Ahora tenemos dos relaciones y dos variables que resolver.

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A} &= m_1 v_{1,D} + m_2 v_{2,D} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,A}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,A}^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1,D}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,D}^2 \end{aligned}$$

Problema: Supongamos que tenemos dos masas iguales y que inicialmente $v_{2,0} = 0$ y $v_{1,0} = v_o$. Encuentre las velocidades inmediatamente después de la colisión, v_1 y v_2 , si es elástica

En esta colisión tenemos que resolver

$$\begin{aligned} v_o &= v_1 + v_2 \\ v_o^2 &= v_1^2 + v_2^2 \end{aligned}$$

Notemos que la masa no aparece en el problema. Resolvamos la primera

$$v_2 = v_o - v_1$$

para sustituir en la segunda. Obtenemos

$$v_o^2 = v_1^2 + (v_o - v_1)^2 = 2v_1^2 + v_o^2 - 2v_o v_1$$

y luego

$$v_1(v_1 - v_o) = 0$$

Tenemos dos soluciones

$$\begin{aligned} v_1 = 0 &\rightarrow v_2 = v_o \\ v_1 = v_o &\rightarrow v_2 = 0 \end{aligned}$$

La segunda relación no tiene sentido a menos que la masa 1 pase por encima de la masa 2. Por lo tanto tenemos que

$$v_1 = 0 \rightarrow v_2 = v_o$$

Las partículas intercambian momento. Lo cual tiene sentido porque trivialmente se conserva el centro de masa y la energía cinética. Esta relación solo se da si las masas son iguales y una está en reposo.

Problema: Supongamos que tenemos dos masas iguales y un resorte como se muestra en la Fig. 8a. ¿Cuál es la distancia a la que vuelve la masa que parte de una altura h si la colisión es elástica.

En este caso podemos usar el teorema de energía-trabajo para obtener

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_o = -f\Delta x = -\mu_k mgh_o$$

Por lo tanto

$$v_1^2 = 2gh_o(1 - \mu_k)$$

La colisión es elástica entre masas iguales, por lo tanto la segunda masa adquiere una velocidad v_1 . Asumamos que mientras está en contacto con el resorte no hay fricción. Por lo tanto al volver

tiene la misma energía cinética. Luego de la segunda colisión tenemos que la velocidad de la masa inicial es ahora $-v_1$. Usando el teorema de trabajo-energía nuevamente tenemos la velocidad justo antes de empezar a subir,

$$v_2^2 = v_1^2 - 2gh_o\mu_k = 2gh_o(1 - 2\mu_k)$$

Si este valor es positivo ($\mu_k < 0,5$) entonces llega a una altura

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_f \quad \rightarrow \quad h_f = \frac{v_2^2}{2g} = h_o(1 - 2\mu_k)$$

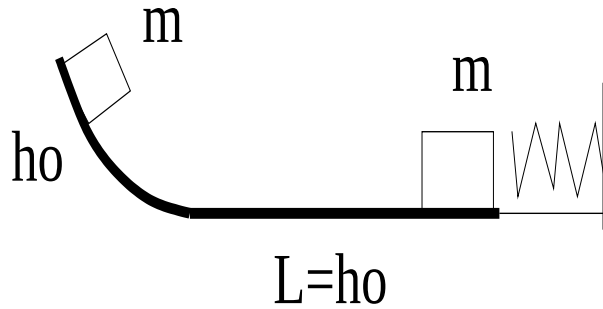


Figura 8: (a) Situación de interés.

3.2. colisiones en 2 dimensiones

En dos o mas dimensiones tenemos que establecer el mismo principio de conservación pero con vectores

$$m_1\vec{v}_{1,A} + m_2\vec{v}_{2,A} = m_1\vec{v}_{1,D} + m_2\vec{v}_{2,D}$$

El problema es que tenemos dos ecuaciones y cuatro valores que resolver (2 componentes por vector).

1. **Colisiones completamente inelásticas:** son colisiones donde los dos cuerpos quedan pegados luego de la colisión. Por lo tanto tenemos

$$\vec{v}_{1,D} = \vec{v}_{2,D} = \frac{m_1\vec{v}_{1,A} + m_2\vec{v}_{2,A}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{tot,A}}{m_1 + m_2}$$

Notemos que en este caso estamos imponiendo dos restricciones, una para cada componente de la velocidad final. En este caso la energía cinética no se conserva (se pierde en la deformación de los objetos).

2. **Colisiones elásticas:** En estas colisiones tenemos no solo conservación de momento, pero también conservación de energía cinética (acordemonos que las fuerzas externas no importan durante la colisión). Ahora tenemos 3 relaciones y 4 variables que resolver.

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_{1,A} + m_2 \vec{v}_{2,A} &= m_1 \vec{v}_{1,D} + m_2 \vec{v}_{2,D} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,A}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,A}^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1,D}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,D}^2 \end{aligned}$$

Supongamos que tenemos dos masas iguales y una colisión elástica. Supongamos que $\vec{v}_{2,0} = 0$ como se muestra en Fig. 10a. Aunque no podemos resolver completamente el problema, podemos encontrar el ángulo final entre las velocidades.

$$\begin{aligned} \vec{v}_{1,A} &= \vec{v}_{1,D} + \vec{v}_{2,D} \\ v_{1,A}^2 &= v_{1,D}^2 + v_{2,D}^2 \end{aligned}$$

La masa salió del problema ya que son iguales. Vemos que el vector $\vec{A} + \vec{B}$ satisface el principio de Pitágoras, como se muestra en la Fig. 10b, por lo tanto el ángulo entre el vector $\vec{v}_{1,D}$ y $\vec{v}_{2,D}$ es 90° .

Problema: Supongamos que tenemos una colisión completamente inelástica entre dos autos de masa $m_1 = 1000$ kg y $m_2 = 1500$ kg como se muestra en la Fig. 9a. El ángulo final es $\theta = 30^\circ$ y los autos se deslizan una distancia $L = 100$ m. Quien tiene la culpa? Asuma que $\mu_k = 0,5$

En este caso tenemos

$$\begin{aligned} m_2 v_2 &= (m_1 + m_2) v_f \cos \theta \\ m_1 v_1 &= (m_1 + m_2) v_f \sin \theta \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} \tan \theta = 0,86$$

Por lo tanto sabemos que $v_2 > v_1$. Para calcular la magnitud de las velocidades necesitamos encontrar v_f . Usando el teorema de energía-trabajo tenemos

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 = f \Delta x = \mu_k (m_1 + m_2) g L$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{m_1 + m_2}{m_2} \sqrt{2 \mu_k g L} \cos \theta = 45 \text{ m/s} \\ v_1 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2 \mu_k g L} \sin \theta = 39,5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

3.3. Masas puntuales vs finitas

Vimos arriba que aun si asumimos que la colisión es elástica, no tenemos suficientes relaciones para resolver el problema completamente. Esto no está bien, entonces las ecuaciones de Newton dan una descripción incompleta? NO. La razón es que estamos considerando los objetos como masa puntuales, pero en la realidad los objetos tienen forma. Por ejemplo, en la Fig. 10d tenemos una colisión elástica entre dos pelotas de billar, una inicialmente estacionaria. Vemos que el parámetro

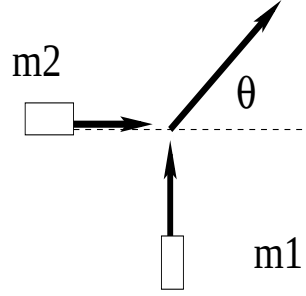


Figura 9: (a) Situación de interés.

de impacto b controla el ángulo de salida de la pelotas, y por lo tanto las condiciones finales de las pelotas quedan completamente determinadas por las ecuaciones de Newton.

Si tenemos colisiones de masas puntuales, o masas de las cuales no tenemos información sobre su forma, entonces tenemos que conocer alguna información extra después de la colisión para poder reconstruir los momentos finales. Por ejemplo, si nos dicen que la colisión es perfectamente inelásticas, entonces podemos resolver los momentos finales inmediatamente como vimos arriba.

Si decidimos jugar billar (asumiendo que son masas iguales) nosotros controlamos el parámetro de impacto, para que la pelota 2 salga en la dirección que queremos. Por otro lado, dado que la colisión es razonablemente elástica, tenemos que la pelota 1 sale en un ángulo de 90° con respecto a la dirección de la pelota 2. En realidad, uno puede controlar este ángulo incluyendo otro término en la energía cinética. Uno puede incluir **la energía rotacional** en el problema al darle un spin a la pelota 1, pero esto lo veremos mas adelante

3.4. colisiones en el centro de masa

Supongamos que queremos resolver el problema de dos masas colisionando elasticamente en una dimensión, tendríamos que resolver las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,L}^A + m_2 v_{2,L}^A &= m_1 v_{1,L}^D + m_2 v_{2,L}^D \\ \frac{1}{2} m_1 (v_{1,L}^A)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2,L}^A)^2 &= \frac{1}{2} m_1 (v_{1,L}^D)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2,L}^D)^2 \end{aligned}$$

donde hemos hecho explícita referencia a nuestro sistema de referencia, que lo llamaremos del laboratorio. Esto implica resolver por $v_{1,L}^D$ en la primera ecuación en término de $v_{2,L}^D$, y luego insertar en la segunda ecuación y resolver la cuadrática por $v_{2,L}^D$.

Supongamos que tenemos una masa $m_1 = 3$ kg con velocidad $v_{1,o} = 4$ m/s y una masa $m_2 = 2$ kg con velocidad $v_{2,o} = 2$ m/s. La masa m_1 golpea elasticamente con la masa m_2 . Cuales son las velocidades finales?

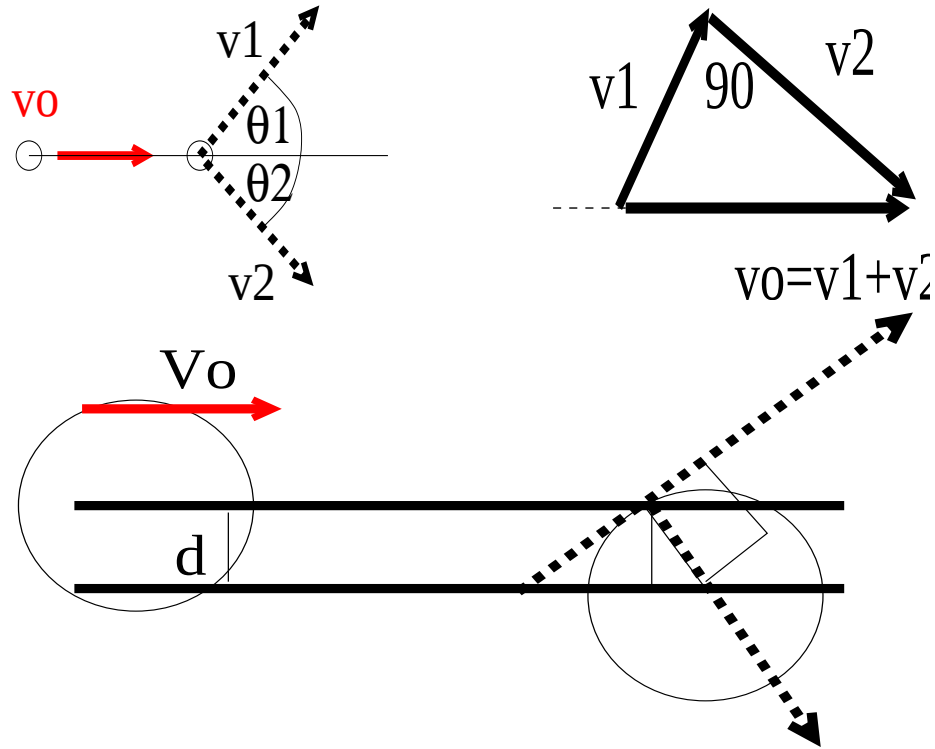


Figura 10: (a) Colisión dos pelotas iguales. (b) Teorema de Pitagoras. (c) (c) Parámetro de impacto.

La forma mas fácil de trasformar al sistema de referencia del centro de masa

$$v_{1,L} = v_{1,com} + v_{com,L}$$

donde la velocidad del centro de masa (la cual no cambia durante la colisión) es

$$v_{com,L} = \frac{m_1 v_{1,o} + m_2 v_{2,o}}{m_1 + m_2} = \frac{16}{5} \text{ m/s}$$

Por lo tanto las velocidades en el centro de masa son

$$\begin{aligned} v_{1,o,com} &= v_{1,o,L} - v_{com,L} = \frac{4}{5} \text{ m/s} \\ v_{2,o,com} &= v_{2,o,L} - v_{com,L} = -\frac{6}{5} \text{ m/s} \end{aligned}$$

en el sistema de referencia del centro de masa tenemos que conservar momento y energía cinética. Notemos que

$$m_1 v_{1,o,com} = -m_2 v_{2,o,com}$$

Y si queremos conservar energía cinética también necesitamos que

$$\begin{aligned} p_{1,f,com} &= -p_{1,o,com} & \rightarrow & & v_{1,f,com} &= -v_{1,o,com} \\ p_{2,f,com} &= -p_{2,o,com} & \rightarrow & & v_{2,f,com} &= -v_{2,o,com} \end{aligned}$$

por lo tanto al volver al sistema de referencia del laboratorio tenemos

$$\begin{aligned} v_{1,f,L} = v_{1,f,com} + v_{com,L} &= -\frac{4}{5} + \frac{16}{5} = \frac{12}{5} m/s \\ v_{1,f,L} = v_{1,f,com} + v_{com,L} &= \frac{6}{5} + \frac{16}{5} = \frac{22}{5} m/s \end{aligned}$$

Por lo tanto existe una forma fácil de resolver este problema en el caso general y es ir al sistema de centro de masa. Primero tenemos que transformar al sistema que se mueve con el centro de masa

$$v_{1,L} = v_{1,com} + v_{com,L} \quad \rightarrow \quad v_{1,com} = v_{1,L} - v_{com,L}$$

donde esto aplica tanto para la partícula 1 como para la 2, y también antes y después. Ya que en la colisiones se conserva el momento, la velocidad del centro de masa es la misma antes y después de la colisión

$$v_{com,L} = \frac{m_1 v_{1,L}^A + m_2 v_{2,L}^A}{m_1 + m_2}$$

En el sistema de referencia del centro de masa tenemos que tanto antes como después de la colisión

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,com}^A + m_2 v_{2,com}^A &= 0 \quad \rightarrow \quad m_1 v_{1,com}^A = -m_2 v_{2,com}^A \\ m_1 v_{1,com}^D + m_2 v_{2,com}^D &= 0 \quad \rightarrow \quad m_1 v_{1,com}^D = -m_2 v_{2,com}^D \end{aligned}$$

Esto es fácil probar usando la relación para $v_{1,com}$ y $v_{2,com}$ de arriba. También tenemos conservación de la energía cinética en el centro de masa con

$$\frac{1}{2} m_1 (v_{1,com}^A)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2,com}^A)^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_{1,com}^D)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2,com}^D)^2$$

Intuitivamente sabemos que la única posibilidad es que

$$\begin{aligned} p_{1,com}^A &\rightarrow p_{1,com}^D = -p_{1,com}^A \\ p_{2,com}^A &\rightarrow p_{2,com}^D = -p_{2,com}^A \end{aligned}$$

En el centro de masa los momento cambian de signo luego de la colisión. Probemos esta matemáticamente utilizando

$$KE = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2m} p^2$$

para re-escribiendo las 3 ecuaciones que tenemos

$$\begin{aligned} p_{1,com}^A &= -p_{2,com}^A \\ p_{1,com}^D &= -p_{2,com}^D \\ \frac{1}{2m_1} (p_{1,com}^A)^2 + \frac{1}{2m_2} (p_{2,com}^A)^2 &= \frac{1}{2m_1} (p_{1,com}^D)^2 + \frac{1}{2m_2} (p_{2,com}^D)^2 \end{aligned}$$

Podemos escribir la ultima relación solo en termino de la masa m_1 utilizando las dos relaciones anteriores y obtener

$$(p_{1,com}^A)^2 \left[\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_1} \right] = (p_{1,com}^D)^2 \left[\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_1} \right]$$

Por lo tanto

$$(p_{1,com}^D)^2 = (p_{1,com}^A)^2 \quad \rightarrow \quad p_{1,com}^D = \pm p_{1,com}^A$$

Pero como m_1 no puede pasar por encima de m_2 entonces se devuelve con la velocidad que tenia

$$\begin{aligned} p_{1,com}^D &= -p_{1,com}^A \rightarrow v_{1,com}^D = -v_{1,com}^A \\ p_{2,com}^D &= -p_{2,com}^A \rightarrow v_{2,com}^D = -v_{2,com}^A \end{aligned}$$

como habíamos intuido. Ahora tenemos que volver al sistema de referencia del centro de masa y obtener

$$\begin{aligned} v_{1,L}^D &= v_{1,com}^D + v_{com,L}^D \\ &= -v_{1,com}^A + v_{com,L}^D \\ &= -(v_{1,L}^A - v_{com,L}^A) + v_{com,L}^D \\ &= 2v_{com,L}^D - v_{1,L}^A \\ &= 2 \frac{m_1 v_{1,L}^A + m_2 v_{2,L}^A}{m_1 + m_2} - v_{1,L}^A \\ &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,L}^A + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,L}^A \end{aligned}$$

De la misma forma tenemos

$$\begin{aligned} v_{2,L}^D &= v_{2,com}^D + v_{com,L}^D \\ &= -v_{2,com}^A + v_{com,L}^D \\ &= -(v_{2,L}^A - v_{com,L}^A) + v_{com,L}^D \\ &= 2v_{com,L}^D - v_{2,L}^A \\ &= 2 \frac{m_1 v_{1,L}^A + m_2 v_{2,L}^A}{m_1 + m_2} - v_{2,L}^A \\ &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,L}^A + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,L}^A \end{aligned}$$

Podemos resumir

$$\begin{aligned} v_{1,L}^D &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,L}^A + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,L}^A \\ v_{2,L}^D &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,L}^A + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,L}^A \end{aligned}$$

Veamos algunos limites interesantes.

1. Si $m_1 = m_2$, entonces

$$\begin{aligned} v_{1,L}^D &= v_{2,L}^A \\ v_{2,L}^D &= v_{1,L}^A \end{aligned}$$

Las partículas intercambian velocidades como ya sabíamos. Ver Fig. 11b.

2. Si $m_1 \gg m_2$, entonces

$$v_{1,L}^D = v_{1,L}^A$$

$$v_{2,L}^D = 2v_{1,L}^A - v_{2,L}^A$$

Esto quiere decir que la m_1 no cambia su momento, mientras que la velocidad relativa de m_2 con respecto a m_1 cambia de signo luego de la colisión, esto es (ver Fig. 11c.)

$$v_{2,L}^D - v_{1,L}^D = -(v_{2,L}^A - v_{1,L}^A) \rightarrow \rightarrow v_{2,L}^D = 2v_{1,L}^A - v_{2,L}^A$$

Notemos que si $v_{1,L}^A = 0$ la velocidad de la masa m_2 cambia de signo, esto es, se devuelve con la misma rapidez. Ver Fig. 11d.

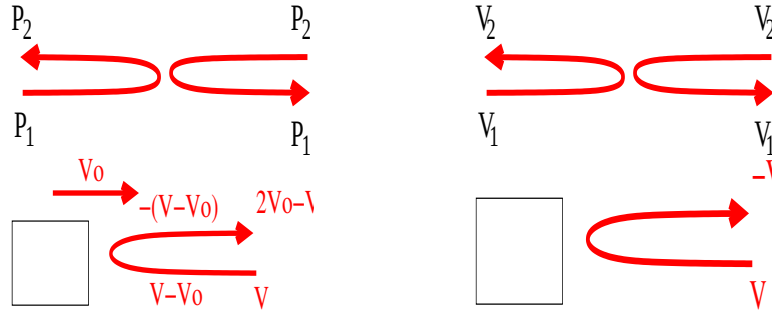


Figura 11: (a) Colisión en el sistema del centro de masa. (b) Colisión si $m_1 = m_2$. Notemos que en este caso las velocidades se intercambian. (c) Colisiones con $m_1 \gg m_2$. (d) Colisiones con $m_1 \gg m_2$ y m_1 en reposo

Si tenemos colisiones en dos dimensiones, entonces podemos hacer el mismo análisis pero ahora la velocidad del centro de masa es en principio un vector. En el sistema del centro de masa nuevamente tenemos un problema indeterminado si las masas son puntuales como discutimos arriba.

Problema: Una situación de interés son los péndulos en colisiones. Por ejemplo, supongamos que tenemos un péndulo de masa m_1 en reposo como se observa en la Fig. 12 y una masa m_2 que dejamos caer desde una altura de h .

1. Supongamos que no hay fricción y la colisión es perfectamente inelásticas. A que altura llega el péndulo? En este caso usamos conservación de energía para estimar la velocidad de m_2 justo antes de la colisión

$$E_i = m_2 g h_o$$

$$E_f = \frac{1}{2} m_2 v_{2,A}^2$$

Por lo tanto justo antes de la colisión tenemos que

$$v_{2,A} = \sqrt{2gh_o}$$

Dado que la colisiones es completamente inelastica, podemos encontrar la velocidad de los dos cuerpos

$$v_D = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh_o}$$

y ahora vemos cuan alto llega usando nuevamente conservación de energía

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_D^2 \\ E_f &= (m_1 + m_2)gh \end{aligned}$$

y obtenemos

$$h = \frac{1}{2g}v_D^2 = \frac{m_2}{g(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{2}m_2v_{2,A}^2 = \frac{m_2^2}{g(m_1 + m_2)^2}h_o$$

con lo cual $h < h_o$ como es esperado.

2. Que cambia si la colisiones es elástica con $m_1 = m_2$.

En este caso la única diferencia es que la velocidad de m_1 despumes de la colisiones es $v_{1,D} = v_{2,A}$ mientras que $v_{2,D} = 0$. Usando conservación de energía podemos encontrar cuan alto llega el péndulo (m_2 se queda abajo).

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2}m_1v_{1,D}^2 \\ E_f &= m_1gh \end{aligned}$$

y obtenemos que

$$h = \frac{1}{2g}v_{1,D}^2 = h_o$$

lo cual tiene sentido ya que ha conservación de energía en cada instante.

3. Que cambia si incluimos un coeficiente de fricción dinámica μ_k que actúa solo sobre la distancia L de la Fig. 12. En este caso tenemos que incluir en el principio de conservación de energía antes de la colisión, el efecto de la fricción,

$$E_f - E_o = -f\Delta x = -\mu_k m_2 g L$$

Notemos que necesitamos que la energía inicial sea mayor que la energía disipada por la fricción, esto es

$$m_2 g h_o > \mu_k m_2 g L \quad \rightarrow \quad h_o > \mu_k L$$

Seguimos el mismo análisis que antes, pero con (asumimos colisiones elásticas con $m_1 = m_2$)

$$v_{1,D} = v_{2,A} = \sqrt{2g(h_o - \mu_k L)}$$

Nuevamente usamos conservación de energía para obtener

$$h = \frac{1}{2g} v_{1,D}^2 = h_o - \mu_k L$$

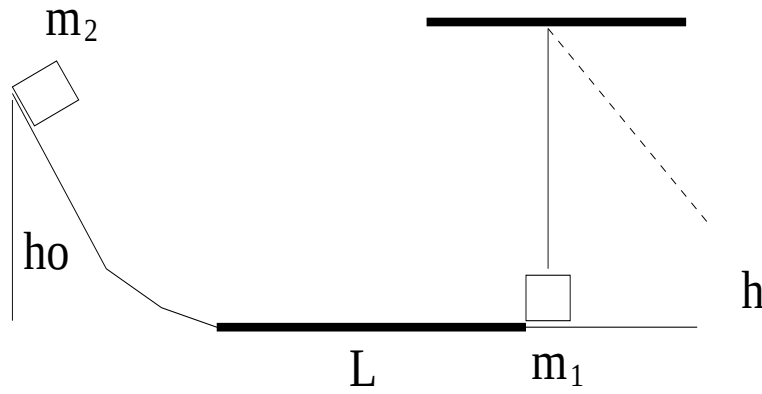


Figura 12: (a) Problema con péndulo

4. Apéndice I: Masas variables y el problema del cohete

Supongamos que tenemos el problema de una masa variable, como es el caso de un cohete. En este caso conviene mirar el problema con pequeños cambios de masa Δm .

1. Supongamos que tenemos inicialmente a la masa m y Δm juntos a una velocidad $\vec{v}$.
2. Supongamos que tenemos finalmente a la masa m a una velocidad $\vec{v} + \Delta \vec{v}$. La masa Δm se mueve a una velocidad $\vec{u}$

Podemos entonces usar el movimiento del centro de masa y escribir

$$\vec{F}^{ext} \Delta t = \vec{P}_{tot,f} - \vec{P}_{tot,i} = [m(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + \Delta m \vec{u}] - [(m + \Delta m) \vec{v}]$$

Al dividir por Δt tenemos

$$\vec{F}^{ext} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} (\vec{u} - \vec{v})$$

Por lo tanto al tomar el límite tenemos

$$\vec{F}^{ext} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{u} - \vec{v})$$

donde el vector $\vec{u} - \vec{v}$ es la velocidad relativa al cohete

$$\vec{v}_{\Delta,com} = \vec{v}_{\Delta,c} + \vec{v}_{c,com} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{\Delta,c} = \vec{v}_{\Delta,com} - \vec{v}_{c,com} = \vec{u} - \vec{v}$$

lo cual tiene sentido. La combinación

$$\frac{dm}{dt}(\vec{u} - \vec{v})$$

es equivalente a una fuerza y se le denomina el “thrust” del cohete.



Figura 13: (a) Cohete antes. (b) Cohete después.

Problema: Supongamos que viajamos en en “Enterprise hacia la estrella mas cercana $d = 4$ años luz) donde nuestra turbina del cohete (de materia-antimateria) expelle esta masa a la velocidad de la luz. Cuanta masa de combustible necesitamos para llevar $m_f = 1$ kg de masa útil en nuestro cohete (asuma que el resto del cohete tiene masa muy pequeña) para llegar a α -centauro si queremos mantener una aceleración igual a g (esto resuelve muchos problemas de salud debido a la ingravidez durante viajes largos ya que los astronautas sienten como si existiera una gravedad artificial y estuvieran en la tierra)

Sabemos que la fuerza externa en este caso se puede considerar como cero. Donde

$$\frac{dv}{dt} = g$$

y

$$(\vec{u} - \vec{v}) = -c = -300,000 km/s$$

Por lo tanto

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m}{c}g$$

La solución a este problema es una exponencial, ya que si $f(t) = A \exp \alpha t$, tenemos que

$$\frac{df(t)}{dt} = A\alpha \exp \alpha t = \alpha A f(t)$$

donde $\alpha = -g/c$ y $A = f(0)$. Por lo tanto

$$m(t) = m_o e^{-\frac{g}{c}t}$$

Es fácil darse cuenta que esta es la solución ya que si le tomamos una derivada obtenemos lo de arriba. La ecuación de movimiento del cohete es

$$x = \frac{g}{2}t^2 \quad \rightarrow \quad yt = \sqrt{2x/g}$$

Resolviendo por m_o tenemos

$$m_o = me^{\sqrt{\frac{2xg}{c^2}}} = me^{\sqrt{2,06d}}$$

Donde m es la masa que nos queda cuando estamos en la posición $x = d$, donde d esta en unidades de años-luz. Al final cuando $x = d$ tenemos $m = m_f$, lo que implica que necesitamos llevar combustible

$$m_c = m_o - m_f = m_f(e^{2,06 \times d} - 1)$$

Por lo tanto para llegar a α -centauro necesitamos llevar $m_c = 16,64m_f$. Claro que esto no incluye el frenar.

La verdad es que es mas conveniente acelerar la mitad del trayecto y frenar la otra mitad. Vemos de inmediato que tenemos la misma ecuación

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m}{c}g$$

ya que

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

y

$$(\vec{u} - \vec{v}) = +c = +300,000km/s$$

Por lo tanto para llegar a la mitad del camino necesitamos

$$m_o = m_{1/2}e^{\sqrt{2,06 \times d/2}}$$

y de la mitad al final tenemos

$$m_{1/2} = m_f e^{\sqrt{2,06 \times d/2}}$$

y por lo tanto

$$m_o = m_{1/2}e^{\sqrt{2,06 \times d/2}} = m_f e^{\sqrt{2,06 \times d/2}} e^{\sqrt{2,06 \times d/2}} = m_f 57,94$$

Por lo tanto para llegar a α -centauro necesitamos llevar $m_c = 56,94m_f$, mucho mayor que antes. Según estos cálculos nos demoraríamos en años

$$t_f = 2\sqrt{x/g} = 3,94$$

Esto no es correcto cuando incluimos el principio de relatividad, ya que el cohete sobrepasa la velocidad de la luz, lo cual no es posible. Veremos esto mas adelante.

5. Apéndice II: Descripción microscópica de roce

Supongamos que tenemos una masa m , de área efectiva A , que se mueve con velocidad v en la dirección x a través de un gas de partículas con densidad ρ . Cual sería la fuerza que el gas ejerce sobre la masa en movimiento?

Supongamos que una partícula del medio (aire) a una velocidad $v_o = -v$ que choca contra la masa. Si asumimos que la masa m es mucho mayor que la masa de las partículas del aire y que la colisión es elástica, entonces $v_f = -v$. Por lo tanto en un intervalo Δt cada una de las partículas

$$N = \rho A v \Delta t$$

en el volumen $Vol = A v \Delta t$ chocan contra esta masa m y cambia su velocidad a

$$\Delta v = 2v$$

generando una fuerza de la masa m sobre cada particular

$$F_{m,p} = m_p \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Si sumamos la fuerza de todas estas colisiones sobre m , por la tercera ley de Newton, generan una fuerza de roce sobre la masa m

$$F_r = N m_p \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\rho m_p A v \Delta t \frac{2v}{\Delta t} = -(2\rho m_p A) v^2$$

Por lo tanto la fuerza de fricción es bv^2 con $b = 2\rho m_p A$.

El resultado de arriba aplica solo en la situación que las partículas en el medio están en reposo. Si las partículas tienen una temperatura y una distribución de velocidades

$$f(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp -\frac{v_x^2}{2T}$$

con T como la temperatura del medio. Entonces tenemos que hacer el mismo análisis que arriba, ver Fig. 14a.

1. Una partícula con velocidad $v_x > v$ golpea desde atrás a la masa m y le genera un cambio de velocidad positivo dado por $2(v_x - v)$. El número de partículas capaces de colisionar con la masa m es $N_{>} = \rho A (v_x - v) f(v_x)$.
2. Una partícula con velocidad $v_x < v$ es golpeada desde atrás por la masa m y le genera a la masa m un cambio de velocidad negativo dado por $2(v - v_x)$. El número de partículas capaces de colisionar con la masa m es $N_{<} = \rho A (v - v_x) f(v_x)$.

Esto genera una fuerza sobre la masa m

$$F_m = \begin{cases} \rho m_p A (v_x - v) f(v_x) 2(v_x - v) & v_x > v \\ \rho m_p A (v_x - v) f(v_x) 2(v - v_x) & v_x < v \end{cases}$$

Ahora tenemos que sumar sobre todas las posibles velocidades v_x , osea integrar, y obtenemos

$$F_r = 2\rho m_p A \int_v^\infty f(v_x)(v_x - v)^2 dv_x - 2\rho m_p A \int_{-\infty}^v f(v_x)(v_x - v)^2 dv_x$$

Con la definición de la función de error

$$Erf[x] = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-y^2} dy$$

tenemos que

$$F_r = -2\rho m_p A \left[\left(1 + \frac{v^2}{v_T^2} Erf\left(\frac{v}{\sqrt{2}v_T}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_T^2}\right) \frac{v}{v_T}\right) \right]$$

donde $v_T^2 = T$. El gráfico es mostrado en la Fig. 14b. Lo interesante es que para pequeñas velocidades $v < v_T$ la fuerza de roce es lineal en v , $F_r \sim v$, mientras que para grandes velocidades la fuerza de roce es cuadrática en v , $F_r \sim v^2$.

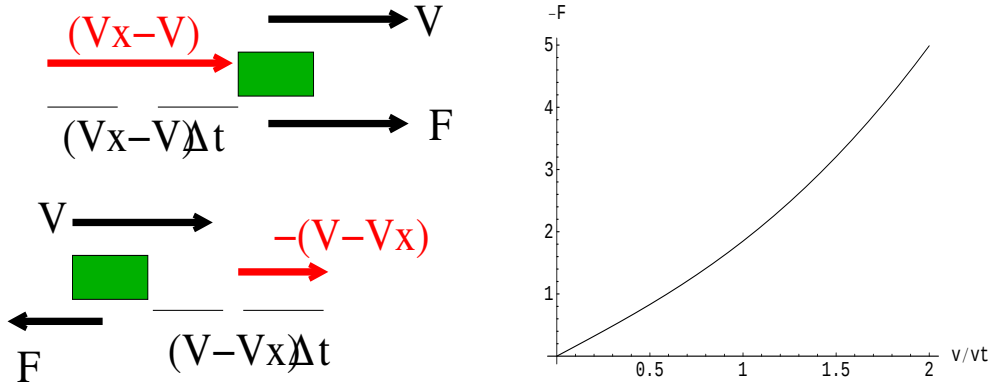


Figura 14: (a) Diagrama de fuerzas, (b) Fuerza de Roce