

Capítulo 7: Rotaciones

Índice

1. Movimiento angular sobre un círculo	2
2. Movimiento circular	3
3. Energía Cinética de un cuerpo rotando alrededor de un eje Fijo	5
3.1. Teorema del eje paralelo	10
4. Conservación de energía de un cuerpo rotando alrededor de un eje Fijo	12
4.1. Conservación de varios cuerpos	16
5. Leyes de Newton para rotación	17
5.1. Potencia	23
6. Objetos que ruedan	24
6.1. Rodar sin resbalarse	24
6.1.1. no-resbalarse	24
6.2. Rodar con resbalarse	25
6.3. Solución por conservación de energía	27
6.4. Solución por fuerzas	29
6.5. Casos interesantes	30

1. Movimiento angular sobre un círculo

Si tenemos un objeto que se mueve en el borde de un círculo, entonces podemos decir que este cuerpo se desplazó una distancia

$$\Delta s = R\Delta\theta$$

donde R es el radio del círculo, y Δs es el arco definido por el ángulo $\Delta\theta$ como se muestra en la Fig. 1a.

Esta relación solo tiene sentido si el ángulo se define en **radianes**, porque sabemos que si $\Delta\theta = 2\pi$ entonces obtenemos el círculo completo y $\Delta s = 2\pi R$ es el perímetro del círculo.

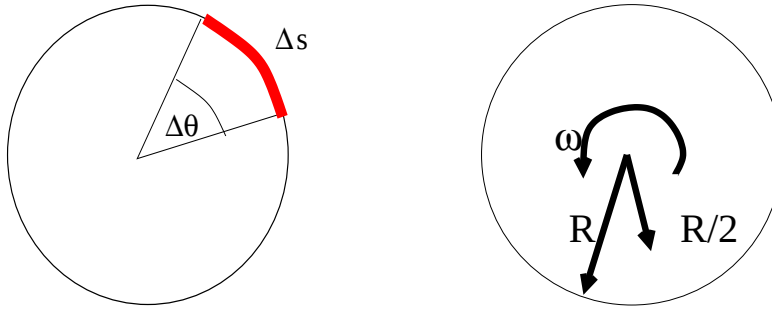


Figura 1: (a) Masa sobre el círculo. (b) Dos masas sobre el disco a distintos radios.

Si el ángulo θ cambia en forma constante $\theta = \omega t + \theta_o$, entonces podemos relacionar la velocidad angular con el cambio en el desplazamiento

$$|v| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

Vemos que tenemos entonces la velocidad angular como

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Notemos que esta relación se da aun para una función arbitraria del tiempo $\theta(t)$. De la misma forma podemos definir la aceleración angular como

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Si la aceleración angular es constante entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{const} \\ \omega &= \omega_o + \alpha(t - t_o) \\ \theta &= \theta_o + \omega_o(t - t_o) + \frac{\alpha}{2}(t - t_o)^2 \\ \omega^2 - \omega_o^2 &= 2\alpha\Delta\theta \end{aligned}$$

2. Movimiento circular

Entendamos un poco mejor este concepto de aceleración centrípeta y tangencial. Supongamos que tenemos la siguiente trayectoria circular

$$\vec{r}(t) = r_o \cos(\omega t + \phi_o) \hat{i} + r_o \sin(\omega t + \phi_o) \hat{j}$$

con $\theta(t) = \omega t + \phi_o$. Es conveniente definir los vectores unitarios radiales y tangenciales

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \hat{t} &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}\end{aligned}$$

Podemos calcular la velocidad como

$$\vec{v}(t) = \omega r_o \left[-\sin(\omega t + \phi_o) \hat{i} + \cos(\omega t + \phi_o) \hat{j} \right] = \omega r_o \hat{t}$$

la cual tiene precisamente la dirección tangencial, dado que el vector

$$\hat{t} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

es el vector tangente al círculo. La aceleración es

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 r_o \left[\cos(\omega t + \phi_o) \hat{i} + \sin(\omega t + \phi_o) \hat{j} \right] = -\omega^2 r_o \hat{r}$$

que es precisamente la aceleración centrípeta con magnitud

$$|a_c| = \frac{v_t^2}{r_o}$$

Supongamos ahora que la velocidad angular esta cambiando y tenemos $\theta(t)$ arbitrario

$$\vec{r}(t) = r_o \cos \theta \hat{i} + r_o \sin \theta \hat{j}$$

1. Podemos derivar esta expresión para obtener la velocidad

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \\ &= r_o \frac{d\theta}{dt} \left(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \right) \\ &= r_o \omega \hat{t} \\ &= v_t \hat{t}\end{aligned}$$

Por lo tanto la velocidad es puramente tangencial la cual tiene magnitud

$$v_t = r_o \omega = r_o \frac{d\theta(t)}{dt}$$

2. La aceleración la podemos calcular como

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\
 &= -r_o \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \right) + r_o \frac{d^2\theta}{dt^2} \left(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \right) \\
 &= -r_o \omega^2 \hat{r} + r_o \alpha \hat{t} \\
 &= -a_c \hat{r} + a_t \hat{t}
 \end{aligned}$$

a) El primer termino es exactamente la aceleración centrípeta radial

$$a_c = \frac{v_t^2}{r_o} = r_o \omega^2$$

b) El segundo termino es la aceleración en la dirección tangencial, y la podemos describir como

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt} \left[r_o \frac{d\theta}{dt} \right] = r_o \frac{d^2\theta}{dt^2} = r_o \alpha$$

Por lo tanto la aceleración es

$$\vec{a} = -\frac{v_t^2}{r_o} \hat{r} + \frac{dv_t}{dt} \hat{t} = -r_o \omega^2 \hat{r} + r_o \alpha \hat{t}$$

Problema Supongamos que tenemos un disco compacto de $R = 10$ cm que acelera del reposo a 500 rev/min en $t = 5$ sec. Encuentre la velocidad y la aceleración de un punto en el borde del disco compacto que parte de $\theta = 0$. Cuantas revoluciones dio el disco en este periodo. Primero tenemos que resolver por la aceleración angular $\alpha = \text{const}$ utilizando la ecuación para ω , y obtener

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{500 \text{ rev}}{5 \text{ min}} \times \frac{1}{s} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \frac{10\pi}{3} \text{ rad/s}^2$$

Notemos que fue convertida a radianes. Entonces en $t = 5$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \omega &= \alpha t = \frac{50\pi}{3} \\
 \theta &= \frac{\alpha}{2} t^2 = \frac{125\pi}{3}
 \end{aligned}$$

En este caso vemos que ω no es constante, por lo tanto tenemos que en $t = 5$ el ángulo es $\theta = 50\pi/3$ y los vectores unitarios

$$\begin{aligned}
 \hat{r}(t=5) &= \cos \theta(5) \hat{i} + \sin \theta(5) \hat{j} = \frac{1}{2} \hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{j} \\
 \hat{t}(t=5) &= -\sin \theta(5) \hat{i} + \cos \theta(5) \hat{j} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la velocidad (en m/s) es

$$\vec{v}(t=5) = R\omega\hat{t} = -R\alpha t\hat{t} = \frac{5\pi}{6}\hat{i} - \frac{5\pi}{2\sqrt{3}}\hat{j}$$

y la aceleración (en m/s²) es

$$\vec{a}(t=5) = -R\omega^2\hat{r} + R\alpha\hat{t} = -\frac{250\pi^2}{9}\hat{r} + \frac{\pi}{3}\hat{t} = \frac{\pi}{6}(5 + \sqrt{3})\hat{i} + \frac{\pi}{6}(1 + 5\sqrt{3})\hat{j}$$

Vemos que $a_c \gg a_t$.

El numero de revoluciones la podemos encontrar de el ángulo $\theta = 125\pi/3$ y dado que una revolución son 2π , entonces

$$\theta = 125\pi/3 \times \frac{1rev}{2\pi} = \frac{125}{6} = 20,83rev$$

3. Energía Cinética de un cuerpo rotando alrededor de un eje Fijo

Si tenemos un objeto solido, por ejemplo un disco como se ve en la Fig. 1b, que esta rotando sobre su **eje de rotación que esta fijo en el tiempo y espacio**, entonces vemos que dos puntos sobre el disco tiene diferentes magnitudes de las velocidades

$$|v| = r_i\omega$$

1. ω tiene el mismo valor para todos los puntos del cuerpo. Esto aplica solo si el cuerpo es rígido.
2. r_i es la distancia al eje de rotación, pero lo importante es que si **el eje de rotación esta fijo en el tiempo y espacio** entonces la distancia al eje de rotación r_i no cambia en el tiempo y el movimiento es circular alrededor de este eje, aunque $\omega(t)$ si puede cambiar.
3. Diferentes puntos sobre el cuerpo tiene diferentes velocidades. En particular, el punto en $r = R/2$ tiene una magnitud de la velocidad que es la mitad de la magnitud de la velocidad que un punto que esta en $r = R$. Por lo tanto tiene mucho mas sentido estudiar la variable angular ω que tiene el mismo valor para todo el cuerpo solido.
4. Este cuerpo esta compuesto por pequeñas masas m_i . Entonces podemos calcular la energía cinética de este cuerpo como

$$KE = \sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i(r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_ir_i^2$$

ya que $\omega(t)$ tiene el mismo valor para todos los elementos de cuerpo solido, por lo que definimos el momento de inercial I, como

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \rightarrow \quad KE = \frac{1}{2} I \omega^2$$

5. Es importante notar que el momento de inercia depende del eje de rotación.
6. Si el **eje de rotación esta fijo en el tiempo y espacio**, este momento de inercia es constante en el tiempo, y lo único que puede depender del tiempo es $\omega(t)$.
7. En el continuo esto se traduce a

$$I = \int r^2 dm$$

Problema: Supongamos que tenemos un sistema de dos masas puntuales que esta rotando como se observa en la Fig. 2a. Calcule el momento de inercia

Tenemos que calcular la distancia de las masas a eje de rotación, que es

$$r = L \sin \theta$$

Por lo tanto el momento de inercia es

$$I = mr^2 + mr^2 = 2mL^2 \sin^2 \theta$$

y la energía cinética es por lo tanto

$$KE = mL^2 \sin^2 \theta \omega^2$$

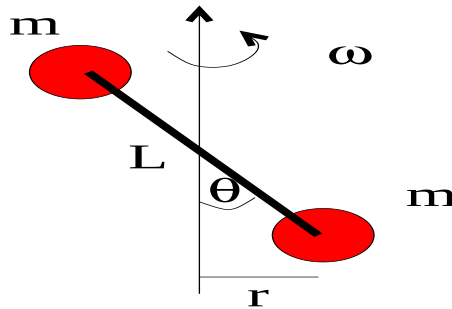


Figura 2: (a) Dos masas puntuales

Problema: Calcule el momento de inercia de una barra rotando sobre un eje al final de la barra (Fig. 3a) y en el centro de la barra (Fig. 2b).

1. **Barra rotando alrededor de una punta:** Utilicemos el método de integración como se muestra en la Fig. 2c. Asumamos que la densidad por unidad λ de la barra es constante, por lo tanto

$$dm = \lambda dx$$

Mirando la figura nos damos cuenta que la distancia de un elemento de la barra al eje de rotación (el origen) es $r = x$, por lo tanto

$$I_b = \int r^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \frac{\lambda}{3} L^3$$

pero la masa de la barra es

$$m_b = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \lambda L$$

por lo tanto

$$I_b = \frac{m_b}{3} L^2$$

2. **Barra rotando alrededor de su centro:** En este caso la distancia de un elemento de la barra a su eje de rotación es $r = x$ (el centro de la barra), por lo tanto

$$I_b = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \frac{\lambda}{12} L^3$$

por lo tanto

$$I_b = \frac{m_b}{12} L^2$$

Claramente una barra rotando alrededor de su centro tiene menos energía cinética que una barra rotando alrededor de una punta (asumiendo la misma ω).

Problema: Supongamos que tenemos un péndulo compuesto de una barra de masa m_b y una masa puntual m_p al final de la barra que puede girar en el eje como se muestra en la Fig. 4a. Calcule el momento de inercia

Hagamoslo por parte. Primero la barra contribuye con

$$I_b = \frac{m_b}{3} L^2$$

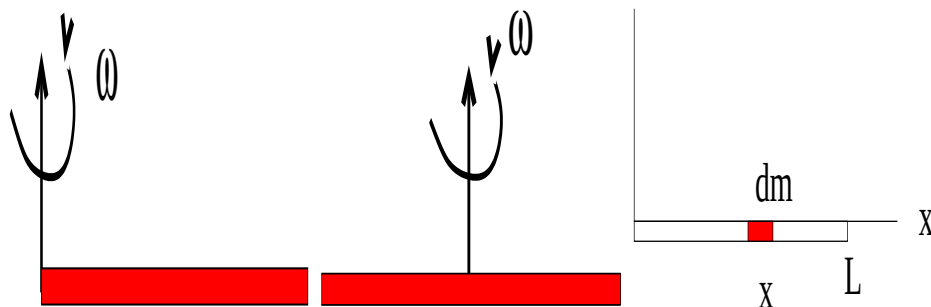


Figura 3: (a) Barra rotando alrededor de una punta. (b) Barra rotando alrededor de su centro. (c) Diagrama de integración.

Ahora tenemos que calcular el momento de inercia de la masa puntual. Aquí es más simple, porque $r = L$ y por lo tanto

$$I_p = m_p r^2 = m_p L^2$$

y el momento de inercia total es

$$I_{tot} = m_p L^2 + \frac{m_b}{3} L^2$$

y la energía cinética es entonces

$$KE = \frac{1}{2} \omega^2 L^2 \left[m_p + \frac{m_b}{3} \right]$$

vemos que la barra tiene cierta relevancia.

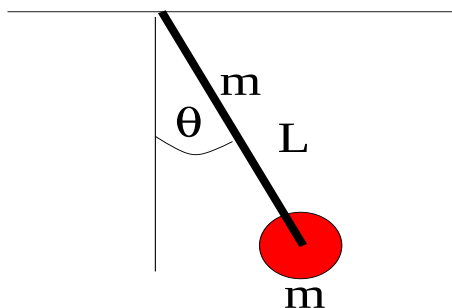


Figura 4: (a) Péndulo

Problema: Supongamos que tenemos un anillo de radios $a < r < b$ que rota respecto a su centro como se ve en la Fig. 5b. Calcule su momento de inercia

Vemos en la figura 5c que tomamos un anillo entre los radios r y $r + dr$. Este anillo infinitesimal tiene masa

$$dm = \sigma 2\pi r dr$$

Donde σ es la densidad de masa por unidad de área. La distancia al eje de rotación es r , y por lo tanto

$$I = \int r^2 dm = \int_{r=a}^{r=b} r^2 \sigma 2\pi r dr = 2\pi\sigma \int_{r=a}^{r=b} r^3 dr = \frac{\pi\rho}{2}(b^4 - a^4)$$

donde la masa es

$$M = \int dm = \int_{r=a}^{r=b} \rho 2\pi r dr = 2\pi\rho L \int_{r=a}^{r=b} r dr = \pi\rho(b^2 - a^2)$$

y por lo tanto

$$I = \frac{M}{2} \frac{(b^4 - a^4)}{(b^2 - a^2)} = \frac{M}{2} \frac{(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)}{(b^2 - a^2)} = \frac{M}{2}(b^2 + a^2)$$

El caso del disco de radio $b = R$ se obtiene con $a \rightarrow 0$,

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Problema: Supongamos que tenemos un cilindro hueco de radios $a < r < b$ que rota respecto a su centro y de largo L como se ve en la Fig. 5d. Calcule su momento de inercia

En este caso conviene tomar un pequeño cilindro de largo L que va de los radios r a $r + dr$. Este cilindro tiene (la diferencia con el anterior es que ahora tenemos un largo L) masa

$$dm = \rho L 2\pi r dr$$

Donde ρ es la densidad de masa por unidad de volumen. La distancia al eje de rotación es r , y por lo tanto

$$I = \int r^2 dm = \int_{r=a}^{r=b} r^2 \rho L 2\pi r dr = 2\pi\rho L \int_{r=a}^{r=b} r^3 dr = \frac{\pi\rho L}{2}(b^4 - a^4)$$

donde la masa es

$$M = \int dm = \int_{r=a}^{r=b} \rho L 2\pi r dr = 2\pi\rho L \int_{r=a}^{r=b} r dr = \pi\rho L(b^2 - a^2)$$

Por lo tanto tenemos finalmente

$$I = \frac{M}{2} \frac{(b^4 - a^4)}{(b^2 - a^2)} = \frac{M}{2} \frac{(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)}{(b^2 - a^2)} = \frac{M}{2}(b^2 + a^2)$$

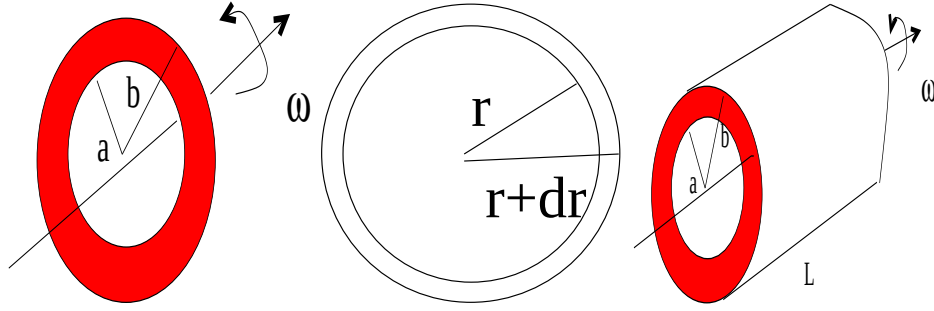


Figura 5: (a) Anillo. (b) Método de integración. (c) Cilindro hueco

Problema: Encuentre el momento de inercial de la esfera.

En este caso podemos sumar (integrar) discos de radio h , con

$$h^2 = R^2 - x^2$$

y ancho dx , desde $x = 0$ hasta $x = R$ como se observa en la Fig. 6. De esta forma tenemos que el disco de ancho dx contribuye con

$$dI = \frac{dM}{2} h^2$$

donde

$$dM = \rho \pi h^2 dx$$

y por lo tanto

$$I = \int dI = \int_0^R \rho \pi h^4 dx = \rho \pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{8\pi}{15} \rho R^5$$

pero dado que

$$M = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \quad \rightarrow \quad I = \frac{2}{5} MR^2$$

3.1. Teorema del eje paralelo

Supongamos que conocemos el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa. Podemos calcular inmediatamente el momento de inercia con respecto a un eje paralelo separado una distancia d como

$$I_n = I_{com} + Md^2$$

Tomemos nuestro origen en el centro de masa. Entonces el momento de inercia con respecto al centro de masa es

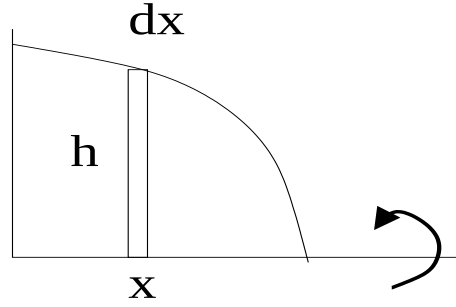


Figura 6: (a) Esfera

$$I_{com} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

donde x_i e y_i son las posiciones de la masa m_i con respecto a nuestro origen, que es centro de masa. Supongamos que queremos calcular el momento de inercia con respecto a este nuevo eje que está ubicado en la posición (x_n, y_n) con respecto al centro de masa. Por lo tanto la distancia de cualquier punto de esta masa al eje de rotación nuevo se puede calcular como

$$r_{i,n}^2 = (x_i - x_n)^2 + (y_i - y_n)^2$$

al expandir tenemos

$$r_{i,n}^2 = (x_i^2 + 2x_i x_n + x_n^2) + (y_i^2 + 2y_i y_n + y_n^2)$$

y el momento de inercia con respecto a este nuevo eje es

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_i m_i [(x_i - x_n)^2 + (y_i - y_n)^2] \\ &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + [2x_n \sum_i m_i x_i + 2y_n \sum_i m_i y_i] + [x_n^2 \sum_i m_i + y_n^2 \sum_i m_i] \\ &= I_{com} + M d^2 \end{aligned}$$

ya que $\sum_i x_i = \sum_i y_i = 0$ ya que elegimos nuestro origen en el centro de masa. Además $x_n^2 + y_n^2 = d^2$.

Si utilizamos este teorema podemos por ejemplo ver que los cálculos que realizamos arriba para una barra están correctos. Por ejemplo, si sabemos que I con respecto a una punta de la barra es $I = ML^2/2$, entonces utilizando $d = L/2$ podemos encontrar el momento de inercia con respecto al centro de masa (o su centro)

$$I_{com} = I_n - M d^2 = \frac{1}{3} ML^2 - \frac{1}{4} ML^2 = \frac{1}{12} ML^2$$

Problema Supongamos que tenemos un péndulo que está formado por una barra de largo L y una esfera de radio R al final de esta barra como se muestra en la Fig. 7b. Encuentre el momento de inercia de este péndulo.

El momento de inercia de una esfera con respecto a su centro es $I_{com} = m_s L^2/5$. Utilizando el teorema del eje paralelo con $d = L$ tenemos

$$I = \frac{1}{3}m_b L^2 + \left[\frac{1}{5}m_s R^2 + m_s L^2 \right]$$

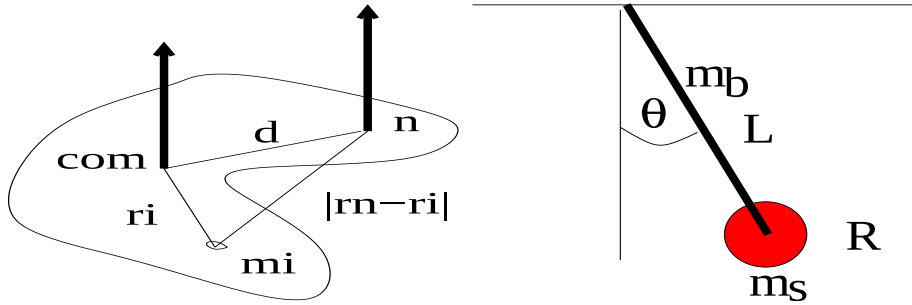


Figura 7: (a) Diagrama eje paralelo. (b) Péndulo Finito.

4. Conservación de energía de un cuerpo rotando alrededor de un eje Fijo

Si el cuerpo esta rotando con respecto a un eje fijo, entonces podemos calcular la energía cinética y potencial y usar el principio de conservación de energía

$$E = KE + U$$

Acordemonos que las fuerzas que mantienen el cuerpo rígido unido no hace trabajo ya que los desplazamientos relativos son cero. Además si las fuerzas noconservativas no hacen trabajo, entonces

$$E_i = E_f$$

En particular vimos que si estamos cerca de la tierra con $g = const$, tenemos que

$$U = \sum_i m_i g h_i = m g h_{com}$$

Por lo tanto

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + m g h_{com}$$

Problema Supongamos que tenemos el péndulo de la Fig. 5a en el punto mas bajo, pero con una frecuencia angular inicial ω_0 . Encuentre la altura máxima del péndulo.

El teorema de conservación de energía para el péndulo dice $E_i = E_f$ con

$$E_i = \frac{1}{2}I\omega_i^2 + (m_p + m_b)gh_{i,com}$$

$$E_f = (m_p + m_b)gh_{f,com}$$

donde $\omega_f = 0$ para llegar a la altura máxima. Por lo tanto tenemos que encontrar $h_{i,com}$ y relacionarlo con $h_{f,com}$. El centro de masa del péndulo esta en

$$(m_b + m_p)h_{i,com} = m_b \frac{L}{2} + m_p 0 \quad \rightarrow \quad h_{i,com} = L \frac{m_b}{2 * (m_b + m_p)}$$

Por lo tanto podemos encontrar

$$\begin{aligned} h_{f,com} &= h_{i,com} + \frac{1}{2g} \frac{I}{(m_p + m_b)} \omega_0^2 \\ &= L \frac{m_b}{2(m_p + m_b)} + \frac{I\omega_0^2}{2g(m_p + m_b)} \\ &= L \frac{m_b}{2(m_p + m_b)} + \frac{\omega_0^2 L^2}{2g} \frac{m_p + \frac{m_b}{3}}{(m_p + m_b)} \end{aligned}$$

En el limite $m_b \rightarrow 0$ tenemos que

$$h_{f,com} = \frac{\omega_0^2 L^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Que es exactamente lo esperado para un péndulo puntual.

Problema Supongamos que tenemos el péndulo que dejamos caer de una altura $h = L + 2R$, el largo del pendulo. Cuanto vale ω al llegar al suelo.

El teorema de conservación de energía para el péndulo dice $E_i = E_f$ con

$$\begin{aligned} E_i &= (m_p + m_b)gh_{i,com} = (m_p + m_b)g(L + 2R) \\ E_f &= \frac{1}{2}I\omega_f^2 + (m_p + m_b)gh_{f,com} = g \left(m_b \left(\frac{L}{2} + 2R \right) + m_p R \right) \end{aligned}$$

donde $\omega_i = 0$. Por lo tanto podemos encontrar ω_f^2

Problema: Cuanto vale la Fuerza sobre el eje cuando esta en el punto mas bajo?

Miremos el diagrama de fuerza de la Fig. 9a. Para el centro de masa de la barra y de la esfera tenemos

$$\begin{aligned} m_b a_{y,b} &= T_e - T_p - m_b g \\ m_p a_{y,p} &= T_p - m_p g \end{aligned}$$

Donde T_p es la fuerza entre las masas y T_e la fuerza sobre el eje. Las masas están haciendo movimiento circular, entonces inmediatamente podemos encontrar

$$\vec{a} = -r_o\omega^2\hat{r} + r_o\alpha\hat{t}$$

Cuando las masas están abajo, ω alcanza su máximo valor y por lo tanto $\alpha = 0$, esto implica que solo hay aceleración centrípeta (apunta hacia arriba, el centro del círculo) y entonces

$$a_{y,b} = r_{com,b}\omega_i^2 = \frac{L}{2}\omega_f^2$$

$$a_{y,p} = r_{com,p}\omega_i^2 = L\omega_i^2$$

Dado que conocemos ω_f (y por ende las aceleraciones) podemos resolver por la fuerza sobre el eje T_e y la fuerza entre las masas T_p .

$$T_e = m_b a_{y,b} + m_p a_{y,p} + g(m_b + m_p) = g(m_b + m_p) + \omega_i^2 L \left(m_p + \frac{1}{2}m_b \right)$$

$$T_p = m_p a_{y,p} + m_p g = m_p(g + \omega^2 L)$$

Aquí podemos tomar algunos limites interesantes. Si $m_b = 0$, entonces

$$T_e = m_p(g + \omega_i^2 L) = m_p g(1 + 2h/L)$$

Si $m_p = 0$, entonces

$$T_e = m_b(g + \omega_i^2 L/2)$$

Problema Supongamos que tenemos la colisión elástica que vimos en el capítulo anterior, y que se muestra en la Fig. 8b donde asumimos que $m_1 = m_p$ y $m_2 = m_b$. Calcule la altura máxima del péndulo.

El teorema de conservación de energía para el péndulo dice $E_i = E_f$ con

$$E_i = \frac{1}{2}\omega_i^2 L^2 m_p \left[1 + \frac{m_b}{3m_p} \right] + (m_p + m_b)gh_{i,com}$$

$$E_f = (m_p + m_b)gh_{f,com}$$

donde $\omega_f = 0$ para llegar a la altura máxima. La solución la encontramos en el problema anterior y es

$$h_{f,com} = L \frac{m_b}{2(m_p + m_b)} + \frac{I\omega_i^2}{2g(m_p + m_b)}$$

Para encontrar ω_i tenemos que asumir conservación de momento y conservación de energía cinética.

$$m_p v_A = m_p v_D + P$$

$$\frac{1}{2}m_p v_A^2 = \frac{1}{2}m_p v_D^2 + KE_D$$

donde $v_D = \sqrt{2gh_o}$. En este caso P es el momento del péndulo inmediatamente después de la colisión, esto es

$$P = \sum_i m_i v_i = \sum_i m_i r_i \omega_i = \omega_i \sum_i m_i r_i = \omega_i (m_p + m_b)(L - h_{i,com})$$

donde r_i es la distancia al eje de rotación. La posición del centro de masa es

$$h_{i,com} = L \frac{m_b}{2 * (m_b + m_p)}$$

Mientras la energía cinética es

$$KE_D = \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

La solución de las dos ecuaciones de la colisión es

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{Im_p - (m_p + m_b)(L - h_{i,com})^2}{Im_p + (m_p + m_b)(L - h_{i,com})^2} v_A \\ v_D &= \frac{2(m_p + m_b)m_p(L - h_{i,com})}{Im_p + (m_p + m_b)(L - h_{i,com})^2} v_A \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos incluir ω_i en esta expresión y encontrar

$$h_{f,com} = L \frac{m_b}{2(m_p + m_b)} + v_D^2 \frac{48m_p^2(m_b + 2m_p)^2(m_b + 3m_p)}{2g(m_p + m_b)(3m_b^2 + 16m_b m_p + 24m_p^2)^2}$$

Veamos el limite obvio $m_b \rightarrow 0$, nos da

$$h = h_{f,com} = \frac{v_D^2}{2g} = h_o$$

Pero $h_{f,com}$ no es la altura h de la masa puntual del péndulo m_p que estamos buscando, pero del centro de masa. Mirando la Fig. 8b podemos relacionar

$$\cos \theta = \frac{L - h}{L} = \frac{L - h_{f,com}}{L - h_{i,com}}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} h &= L - L \frac{L - h_{f,com}}{L - h_{i,com}} = L \frac{h_{f,com} - h_{i,com}}{L - h_{i,com}} \\ &= h_o \frac{96m_p^2(m_b + 2m_p)(m_b + 3m_p)}{(3m_b^2 + 16m_b m_p + 24m_p^2)^2} \end{aligned}$$

Nuevamente si tomamos el limite $m_b \rightarrow 0$ tenemos

$$h = h_o$$

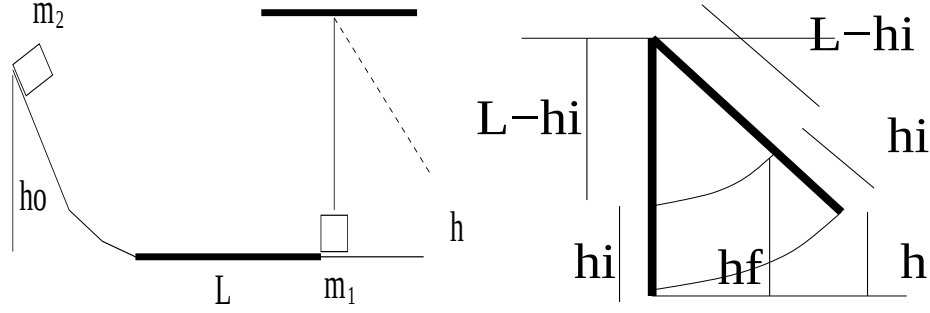


Figura 8: (a) Colisión con el péndulo. (b) Diagrama para calcular h

4.1. Conservación de varios cuerpos

Aquí tenemos que tener cuidado ya que necesitamos que los trabajos hechos por las fuerzas de acción-reacción sean cero al sumarlas.

Problema: Resolvamos la máquina de Atwood, pero con una polea (un disco) que tiene una masa m_p y un radio R como se ve en la Fig. 9b. El largo de la cuerda es $L + \pi R$, la altura de la polea es L , la masa m_1 parte desde el suelo en reposo, y $m_1 < m_2$. La cuerda se mueve sobre la polea son resbalar. Calcule ω cuando m_2 golpea el suelo.

Aquí nuevamente podemos utilizar conservación de energía ya que los desplazamientos de las masas son iguales y por lo tanto las fuerzas de acciones y reacción no hacen trabajo. La energía mecánica del sistema es entonces

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_p\omega^2 + m_1gh_1 + m_2gh_2$$

La polea no se mueve. Entonces inicialmente tenemos

$$E_i = m_2gL$$

y finalmente

$$E_f = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_p\omega^2 + m_1gL$$

Aquí es importante darse cuenta que necesitamos relacionar v_1 con v_2 y ω . Claramente $v_1 = -v_2 = v_f$ si la polea no cambia de altura.

Además si la m_1 sube una distancia Δy_1 , la polea rota un ángulo $\Delta\theta$ dado por

$$|\Delta y_1| = R|\Delta\theta|$$

Entonces al dividir por Δt y tomar el limite nos damos cuenta que

$$|v_1| = R|\omega|$$

Esta relación se le denomina **non-slip** o **no-resbala**. Si la cuerda resbalara sobre la polea, tendríamos que considerar esto, aparte de la fricción. Por lo que tenemos

$$E_f = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{I_p}{R^2} \right) v_f^2 + m_1 g L$$

Para un anillo de radio R , $I_p = MR^2/2$ porque toda la masa está a la misma distancia del eje de rotación. Por conservación de energía $E_f = E_i$ tenemos

$$v_f = \sqrt{2gL \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m_p}{2}}}$$

Vemos ahora que se gasta energía en rotar la polea.

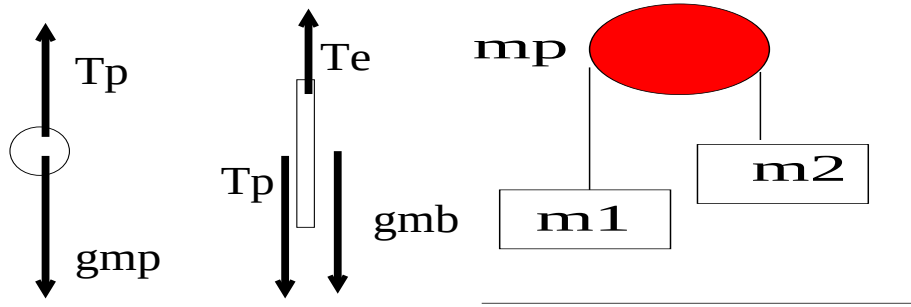


Figura 9: (a) Diagrama de fuerza para el péndulo. (b) Máquina de Atwood.

5. Leyes de Newton para rotación

Estudiemos como podemos re-escribir la 2da ley de Newton pero para un cuerpo **rotando con respecto a un eje fijo en el tiempo y en el espacio**.

La primera observación es que si tenemos una masa m dando vueltas en un movimiento circular, la ley de Newton dice

$$\vec{F} = m\vec{a} = [-mr\omega^2\hat{r} + mr\alpha\hat{t}]$$

Nos damos cuenta que solo la fuerza tangencial es capaz de cambiar $\omega(t)$, esto es producir una aceleración angular α . Por lo tanto tenemos que

$$mr\alpha = F_t = \vec{F} \cdot \hat{t}$$

La fuerza radial no afecta el movimiento angular. Para una de las masas m_i que forman el cuerpo rígido tenemos

$$m_i r_i \alpha = F_{t,i}$$

Multipliquemos por r_i esta expresión y sumemos para obtener

$$\sum_i m_i r_i^2 \alpha = \sum_i r_i F_{t,i}$$

reconocemos el momento de inercia

$$I\alpha = \tau = \sum_i \tau_i = \sum_i r_i F_{t,i}$$

donde τ es el torque sobre el objeto.

1. El torque τ_i se calcula como el componente de la fuerza tangente al círculo que realiza m_i multiplicado por el radio del círculo r_i , como se ve en la Fig. 10a

$$\tau = Fr \sin \theta$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

2. A veces el componente tangencial de la fuerza se puede calcular como

$$F_t = \vec{F} \cdot \hat{t}$$

3. Mirando la Fig. 10b vemos que el torque también se puede calcular como

$$\tau = FL$$

donde L es el **lever-arm** o **distancia a la fuerza**, que se calcula como la distancia al eje de la fuerza.

4. Hay dos forma de producir un aceleración angular. Una es aumentar la fuerza y la otra es aumentar la distancia L donde se ejecuta la fuerza.

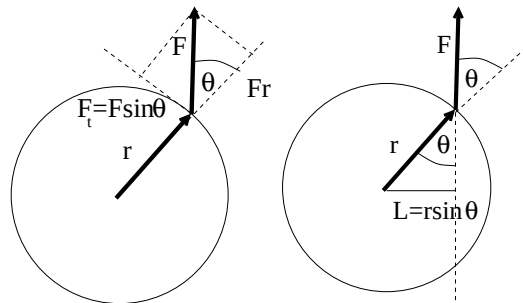


Figura 10: (a) Fuerza y torque. (b) Distancia y torque.

Para resolver problemas con objetos rotando con respecto a un eje fijo tenemos que:

1. Construir un diagrama de fuerzas
2. Distinguir la dirección de rotación. En general el signo de α y ω es arbitrario. Es arbitrario como definimos θ y en que dirección aumenta. Por lo general se define el ángulo θ entre el vector $\hat{r}$ y el eje $\hat{x}$, como muestra la Fig. 11. Así es estándar considerar positivo si va **contra las manecillas del reloj** y negativo si va **con las manecillas del reloj**. Esta definición de θ inmediatamente define el signo de ω y α .
3. Una vez que definimos el signo de α tenemos que tener en cuenta este signo al relacionarlo con la aceleración al forzar las restricciones.
4. El vector $\hat{t}$ es tangente al círculo y en la dirección que aumenta θ . Este vector se puede usar para calcular los torque respectivos

$$F_t = \vec{F} \cdot \hat{t}$$

obteniéndose el signo inmediatamente.

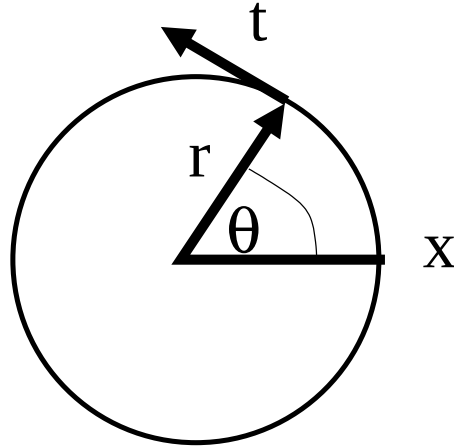


Figura 11: Definición estándar de θ

Supongamos que tenemos un objeto rígido capaz de rotar sobre un eje como se observa en la Fig. 12a bajo la fuerza de gravedad. Para cada masa m_i del cuerpo queremos calcular el torque $\tau_i = r_i F_t$ donde F_t es el componente tangente al círculo que ejecuta la masa m_i . Tenemos como se observa en la Fig. 12a que

$$\left[\begin{array}{l} \vec{F}_g = -mg\hat{j} \\ \hat{t} = -\sin\theta_i\hat{i} + \cos\theta_i\hat{j} \end{array} \right] \rightarrow \tau_i = r_i \vec{F}_g \cdot \hat{t} = -mgr_i \cos\theta_i = -mgx_i$$

con la convención del signo mencionado arriba. Por lo tanto tenemos que

$$\sum_i \tau_i = \sum_i m_i g x_i = g M x_{com}$$

la cual puede variar en el tiempo.

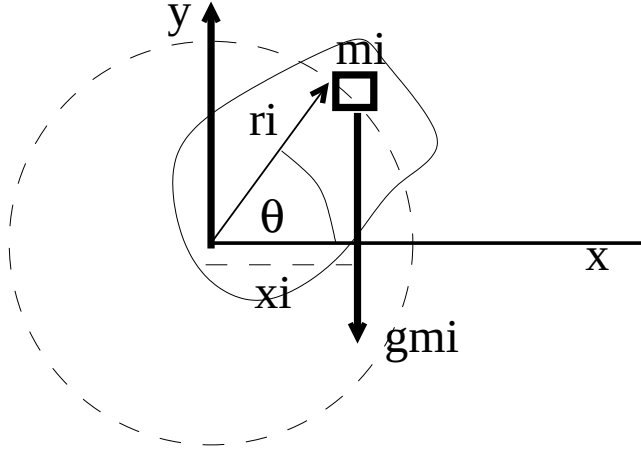


Figura 12: (a) Torque de la fuerza de gravedad. Notemos que el eje de rotación esta en el origen pero en la dirección z.

Problema: Resuelva el problema de la máquina de Atwood usando torques.

Primero tenemos que hacer el diagrama de fuerzas como se ve en la Fig. 13a. Notemos que en este caso $T_1 \neq T_2$ porque tenemos que mover la polea. Las ecuaciones de movimiento para m_1 y m_2 son

$$\begin{aligned} m_1 a_{1,y} &= T_1 - m_1 g \\ m_2 a_{2,y} &= T_2 - m_2 g \end{aligned}$$

Ahora construiremos la ecuación de movimiento para la polea

$$I_p \alpha = T_1 R - T_2 R$$

Notemos que con la convencion de arriba, T_1 trata de aumentar θ , mientras T_2 trata de disminuirlo. Notemos que estos signos se puede obtener directamente tomando el producto punto entre $\vec{F} \cdot \hat{t}$. Notamos que

1. El signo de α y ω esta determinado cuando elejimos θ y siguiendo el estándar las definimos como positivas si van en la dirección opuestas a las manecillas de reloj, esto es si aumenta θ como se muestra en la Fig. 13b.
2. T_1 es paralelo a $\hat{t}$ y aumenta α
3. T_2 es antiparalelo a $\hat{t}$ disminuye α

Hay dos otras fuerzas que actúan sobre la polea, estas son la gravedad y la fuerza que la mantiene en posición F_s , pero ninguna de estas fuerzas generan un torque ya que la fuerza de gravedad actúan sobre el centro de masa que es el mismo que el eje de rotación, entonces $r = 0$. La normal es radial al punto de contacto, y por lo tanto no tiene un componente tangencial. Por lo tanto ahora relacionamos las aceleraciones como

$$a_{1,y} = -a_{2,y} = a$$

y usamos la condición de **non-slip**

$$-R\alpha = a$$

ya que $\Delta y_1 = -R\Delta\theta$ como fueron definidas. Por lo tanto

$$\begin{aligned} m_1 a &= T_1 - m_1 g \\ -m_2 a &= T_2 - m_2 g \\ I_p a / R &= T_2 R - T_1 R \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{I_p}{R^2} a = T_2 - T_1$$

Podemos resolver por a y obtener

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I_p}{R^2}}$$

Si queremos calcular la velocidad con que cae m_2 cuando llega al suelo, usamos

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2a_2\Delta y} = \sqrt{2gL \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m_p}{2}}}$$

Podemos calcular las tensiones entonces

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1 a + m_1 g = m_1 g \frac{2m_2 + \frac{m_p}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m_p}{2}} \\ T_2 &= m_2 g - m_2 a = m_2 g \frac{2m_1 + \frac{m_p}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m_p}{2}} \end{aligned}$$

Notamos que cuando $m_p = 0$ tenemos las dos tensiones iguales.

Notemos que cuando calculamos la energía cinética el signo de ω no es relevante, en las fuerzas el signo de α si lo es!!!

Problema: Tomemos un péndulo formado de una esfera de radio R y masa m_s al final de una barra de masa m_b y largo L . Si partimos de la posición horizontal en reposo, calcule la fuerza que se ejerce sobre el eje.

Usando el diagrama de fuerza de la Fig. 13c, tenemos en la posición horizontal

$$I\alpha = \tau_g + \tau_e$$

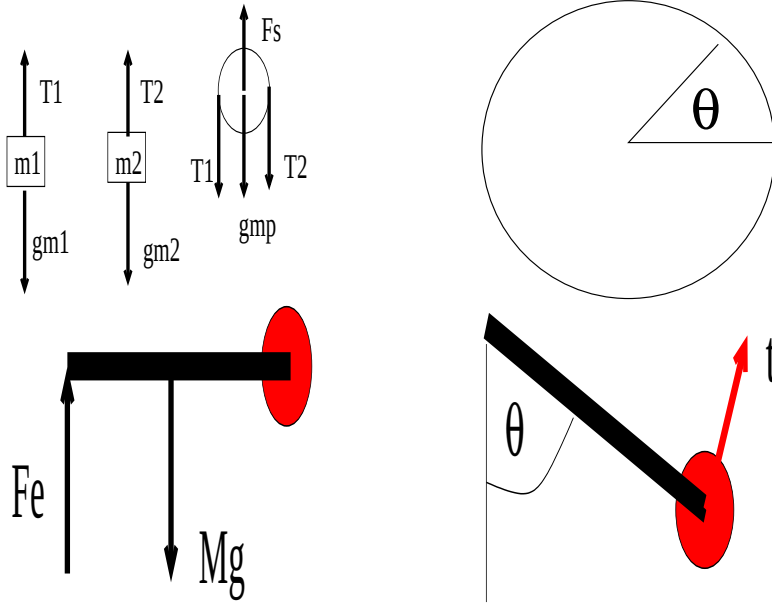


Figura 13: (a) Diagrama de fuerzas para máquina de Atwood. (b) Diagrama para el signo de α . (c) Diagrama de fuerzas sobre el péndulo. (d) Definición del ángulo.

donde

$$\tau_g = -(m_b + m_s)gd_{com} = -g \left(m_b \frac{L}{2} + m_s L \right)$$

mientras que

$$\tau_e = r_e F_e = 0$$

ya que $r_e = 0$, la distancia al eje de rotación. Notemos el signo del torque ya que $\Delta\theta$ y α van contra las manecillas del reloj. Si utilizamos las 2da ley de Newton sobre el centro de masa tenemos

$$(m_b + m_p)\vec{a}_{com} = -(m_b + m_p)g\hat{j} + \vec{F}_e$$

Dado que el centro de masa esta moviéndose en una movimiento circular tenemos

$$\vec{a}_{com} = -r_{com}\omega^2\hat{r} + r_{com}\alpha\hat{t} = r_{com}\alpha\hat{j}$$

ya que inicialmente $\omega = 0$ y $\hat{t} = \hat{j}$ y asumimos que $\alpha < 0$. Poniendo las dos ecuaciones tenemos

$$\vec{F}_e = (m_b + m_s)g\hat{j} + (m_b + m_s)r_{com}\alpha\hat{j}$$

y finalmente usando $\alpha = \tau_g/I$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_e &= (m_b + m_s) \left[g + r_{com} \frac{\tau_g}{I} \right] \hat{j} \\
&= g(m_b + m_s) \left[1 - \frac{d_{com}^2 (m_b + m_s)}{I} \right] \hat{j} \\
&= g(m_b + m_s) \left[1 - \frac{1}{m_b + m_c} \frac{L^2 (\frac{m_b}{2} + m_s)^2}{\frac{1}{3} m_b L^2 + [\frac{1}{5} m_s R^2 + m_s L^2]} \right] \hat{j}
\end{aligned}$$

Problema: Como funcionan los cambios de una bicicleta.

Problema: Tomemos la balanza de la Fig. 14. La pregunta cual es el signo de α .

Usando torques, podemos escribir

$$I\alpha = m_1 g x - m_2 g (L - x)$$

por lo tanto en el equilibrio

$$\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

Si las masa son iguales $x = L/2$.

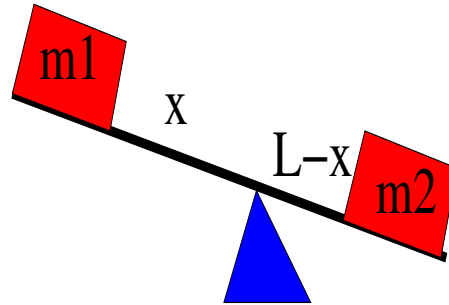


Figura 14: Balanza

5.1. Potencia

Podemos relacionar la potencia $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ con su análogo angular

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot (r_i \omega \hat{t}) = \omega \vec{F} \cdot \hat{t} r_i = \omega \tau$$

Los autos generalmente se caracterizan por el torque a cierta velocidad angular, lo que genera una potencia, generalmente escrita en termino de caballos de fuerza.

6. Objetos que ruedan

En esta sección discutiremos como objetos ruedan. A priori este problema es mas complicado que los problemas vistos hasta ahora porque el eje de rotación se esta moviendo. Pero veremos que mientras el eje de rotación no cambie de dirección podemos usar los mismos conceptos de energía cinética y torque anteriormente discutidos.

6.1. Rodar sin resbalar

Si tenemos por ejemplo un disco rodando como se muestra en la Fig. 15a vemos que necesitamos una fuerza de fricción para que el objeto no resbale. Esta fuerza de fricción se opone al movimiento que en este caso seria resbalar sin rotar, por lo tanto apunta en la dirección como dice la figura ya que trata de detener el resbalar.

6.1.1. no-resbalar

La condición para no resbalar es que la distancia recorrida Δx por el objeto y el ángulo $\Delta\theta$ están relacionados con

$$\Delta x = -R\Delta\theta$$

ya que el movimiento del centro de masa hace que θ se mueva en la dirección de las manecillas del reloj. Por lo tanto tenemos también, diferenciando, que

$$v_x = -R\omega$$

$$a_x = -R\alpha$$

Estas son las condiciones de **no slip** o **no resbalar**.

Con estas condiciones podemos escribir la ecuación de movimiento de cualquier punto del cuerpo como

$$\begin{aligned}\vec{r}_{i,s} &= \vec{r}_{i,com} + \vec{r}_{com} \\ &= \left[R \cos(\omega_o t + \theta_i) \hat{i} + R \sin(\omega_o t + \theta_i) \hat{j} \right] + \left[v_o t \hat{i} + R \hat{j} \right]\end{aligned}$$

En este caso asumimos una velocidad constante. La velocidad es entonces

$$\vec{v}_i = [v_o - R\omega_o \sin(\omega_o t + \theta_i)] \hat{i} + R\omega_o \cos(\omega_o t + \theta_i) \hat{j}$$

El punto que esta instantáneamente en contacto con el suelo tiene $\omega_o t + \theta_i = -\pi/2$, con lo cual tenemos

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= v_o t \hat{i} \\ \vec{v}_i &= (v_o + R\omega_o) \hat{i} = 0\end{aligned}$$

Notemos que si no hay fricción la velocidad del punto en contacto con el suelo tiene velocidad cero, esto es, **no se resbala!!!!**. Lo siguiente es equivalente

1. El objeto no se resbala
2. $v_x = -R\omega$
3. $a_x = -R\alpha$
4. La velocidad del punto en contacto es $v_x = 0$
5. La fricción que permite el rodamiento es la **fricción estática** ya que el punto de contacto tiene $v = 0$. Notemos que no sabemos la magnitud de f_s , solo sabemos que $f_s \leq \mu_s N$, por lo tanto tendremos que resolver por f_s de las ecuaciones.
6. La fricción estática no hace trabajo entonces y el movimiento se puede mantener indefinidamente (esto no es exactamente verdad, pero asumiremos que si lo es por ahora)

Miremos el diagrama de fuerzas de la Fig. 15b. Aquí tenemos

$$\begin{aligned} ma_{x,com} &= -f_s \\ ma_{y,com} &= N - mg \\ I\alpha &= -Rf_s \end{aligned}$$

Notemos que a medida que el cuerpo se mueve hacia adelante, con la orientación elegida (contra las manecillas del reloj) para θ , tenemos que la fuerza de fricción trata de disminuir el ángulo θ , por lo tanto el torque es negativo. Con esta definición de θ la condicionó de no resbalarse es

$$a_{x,com} = -R\alpha$$

Notemos que tenemos que encontrar f_s , y a_{com} , por lo que tenemos

$$\begin{aligned} a_{x,com} &= 0 \\ f_s &= 0 \end{aligned}$$

Notemos que esto tiene sentido ya que $P = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$.

6.2. Rodar con resbalarse

Pero que pasa si se resbala? En ese caso

1. El objeto se resbala, esto implica que o $v > R\omega$ o $v < R\omega$
2. La fricción dinámica actúa sobre el centro de masa ahora y frena el centro de masa hasta que pueda llegar al punto de donde rueda sin resbalarse, cuando se cumple $v = -R\omega$.

Problema: Supongamos que tenemos un disco que tiene una velocidad inicial v_o , pero no esta rotando. Cuanto se demora en llegar a la condición de rodar sin resbalarse? Que distancia recorrer? Cuanta energía perdió?

Mirando el diagrama de fuerzas de la Fig. 15b, tenemos nuevamente

$$\begin{aligned} ma_{x,com} &= -f_k \\ ma_{y,com} &= N - mg \\ I\alpha &= -Rf_k \end{aligned}$$

Notemos que a medida que el cuerpo se mueve hacia adelante, con la orientación elegida (contra las manecillas del reloj) para θ , tenemos que la fuerza de fricción dinámica trata de disminuir el ángulo θ , por lo tanto el torque es negativo. Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$\begin{aligned} a_{x,com} &= -\mu_k g \\ \alpha &= -\frac{R\mu_k mg}{I} \end{aligned}$$

Con esta definición de θ la condición de no resbalarse es

$$v_{x,com} = -R\omega$$

En algún instante se satisface esta relación. Las ecuaciones de movimiento para cada variable son

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_o + \alpha t &= \omega &= -\frac{R\mu_k mg}{I} t \\ v_{x,com} &= v_o + a_{x,com} t &= v_o - \mu_k g t \end{aligned}$$

Al igualar obtenemos el tiempo

$$t_r = \frac{v_o}{\mu_k g} \frac{I}{I + mR^2}$$

En ese instante recorre una distancia

$$\Delta x = v_o t_r - \frac{1}{2} a_{x,com} t_r^2 = \frac{v_o^2}{2\mu_k g} \frac{2mR^2 + I}{(I + mR^2)^2}$$

Sabemos que inicialmente el cuerpo tenia

$$K_o = \frac{1}{2} m v_o^2$$

Al final tenia

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 \\ &= \frac{1}{2} (mR^2 + I) \omega_f^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{v_o^2 m^2 R^2}{2(I + mR^2)} \\ \frac{\Delta KE}{KE_o} &= -\frac{I}{I + mR^2} \end{aligned}$$

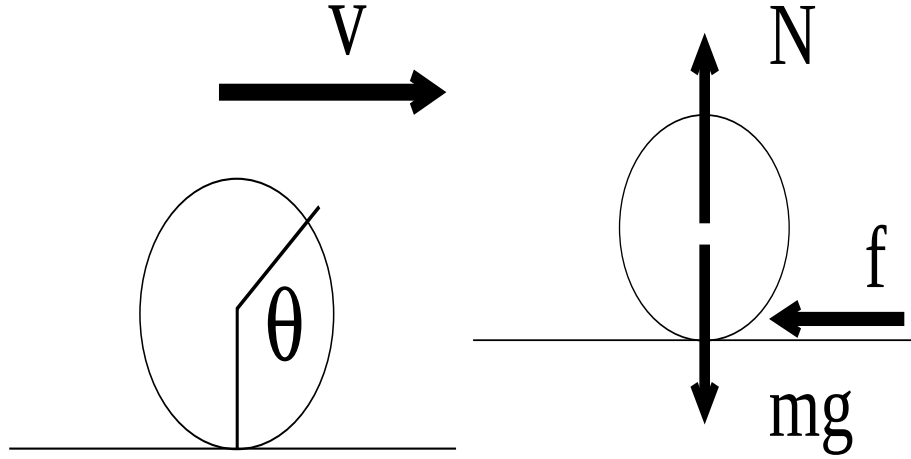


Figura 15: (a) Disco rodando en el plano (b) Diagrama de fuerzas del disco.

6.3. Solución por conservación de energía

Supongamos que tenemos un objeto compuesto de varias masas y escribimos

$$\vec{v}_i = \vec{u}_i + \vec{v}_{com}$$

donde $\vec{u}_i$ es la velocidad relativa al centro de masa. Podemos escribir la energía cinética total

$$\begin{aligned} KE &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{u}_i + \vec{v}_{com})^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{com}^2 + \sum_i m_i \vec{u}_i \cdot \vec{v}_{com} \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \frac{1}{2} M v_{com}^2 \end{aligned}$$

ya que $\sum_i m_i \vec{u}_i = 0$. Podemos descomponer entonces la energía cinética total

$$KE = KE_{com} + KE_r$$

como la energía cinética del centro de masa

$$KE_{com} = \frac{1}{2} M v_{com}^2$$

y la energía con respecto al centro de masa

$$KE_r = \sum_i m_i u_i^2$$

donde u_i es la velocidad con respecto al centro de masa, esto es $v_i = u_i + v_{com}$.

Problema: Supongamos que tenemos un cuerpo rodando en un plano inclinado de ángulo θ como se muestra en la Fig. 16a. Si parte del reposo a una altura h , encuentre la velocidad cuando llega al suelo.

En este caso escribimos energía cinética como

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

porque la energía cinética con respecto al eje de rotación (el centro de masa en este caso) es

$$KE_r = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Entonces podemos escribir la conservación de energía como

$$E_i = mgh$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Si el disco rueda sin resbalarse, entonces

$$|v| = R\omega$$

Entonces de $E_i = E_f$ podemos encontrar

$$v = \sqrt{2gh \frac{mR^2}{mR^2 + I}}$$

el cual es menor a una masa puntual, lo que tiene sentido ya que tenemos que gastar esfuerzo en hacer rotar el cuerpo. Notamos inmediatamente que los cuerpos con I menor llegan más rápido al suelo. La esfera llega antes que un disco.

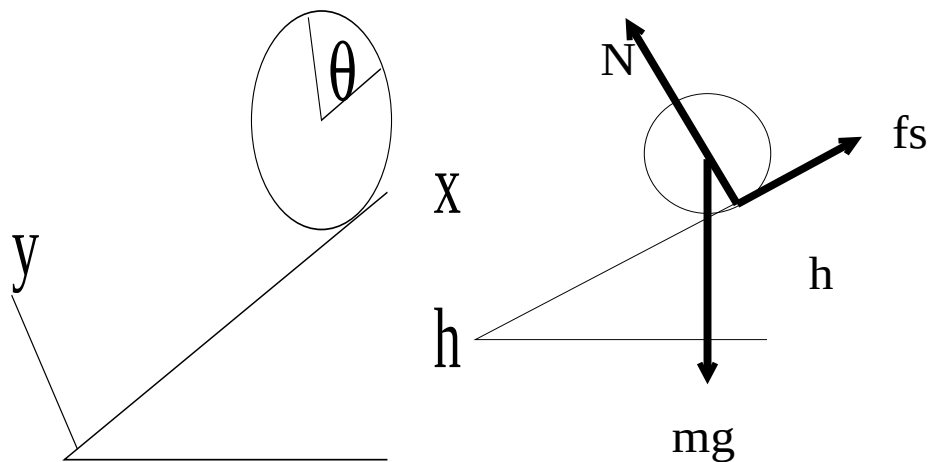


Figura 16: (a) Disco rodando en plano inclinado (b) Diagrama de fuerzas del disco.

6.4. Solución por fuerzas

Aun cuando en general el centro de masa es un sistema no-inercial en general se puede aun escribir

$$\tau = I_{com}\alpha$$

donde τ , I , y α son con respecto al centro de masa y determinan la parte angular del movimiento.

Problema: Resolver el problema de un cuerpo rodando en el plano inclinado usando fuerzas y torques. Cuanto debe de ser la fuerza de fricción? Cuanto es el ángulo máximo permitido para no resbalarse?

En este caso del diagrama de fuerzas Fig. 16b tenemos

$$\begin{aligned} ma_{x,com} &= f_s - mg \sin \theta \\ ma_{y,com} &= N - mg \cos \theta \\ I\alpha &= -Rf_s \end{aligned}$$

Notemos que a medida que el cuerpo se mueve hacia abajo, con la orientación elegida (contra las manecillas del reloj) para θ , tenemos que la fuerza de fricción dinámica trata de aumentar el ángulo θ , por lo tanto el torque es positivo. Por lo tanto la condición de no resbalarse dice que

$$-\Delta x = R\Delta\theta \quad \rightarrow \quad a_{x,com} = -R\alpha$$

ya que a medida que el cuerpo rueda hacia abajo el ángulo θ aumenta, pero al bajar en nuestro sistema de referencia $\Delta x < 0$. Podemos resolver entonces las dos ecuaciones como

$$\begin{aligned} a_{x,com} &= -\frac{mR^2}{mR^2+I}g \sin \theta \\ f_s &= \frac{I}{mR^2+I}gm \sin \theta \end{aligned}$$

Notamos que si $\theta = 0$ tenemos el resultado anterior que $ma_{x,com} = f_s = 0$. Vemos nuevamente que el cuerpo con el momento de inercia menor llega mas rápido al suelo. La velocidad al llegar al suelo la podemos calcular como

$$v_s = \sqrt{-2a_{x,com}L} = \sqrt{2gh \frac{mR^2}{mR^2+I}}$$

ya que $L \sin \theta = h$ y obtenemos el mismo valor anterior.

Sabemos que existe un ángulo donde la condiciones de no-resbalar se va a romper. Usando $N = mg \cos \theta$ podemos encontrar que

$$\frac{I}{mR^2+I}gm \sin \theta \leq f_s = \mu_s mg \cos \theta$$

lo que implica que

$$\tan \theta_{max} \leq \mu_s \left[1 + \frac{mR^2}{I} \right]$$

Interesantemente el anillo se resbala antes que el disco y que la esfera. Notemos que mientras no se resbale nuevamente tenemos $P = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$, y la energía mecánica se conserva.

6.5. Casos interesantes

Problema: Resuelva el problema de la máquina de Atwood si la cuerda tiene masa m_c y largo $L + \pi R + 2R$. Use conservación de energía.

Utilicemos conservación de energía ya que los trabajos realizados por las fuerzas de acción-reacción suman cero. Inicialmente la polea no se mueve, por lo tanto

$$E_i = m_2gL + m_{c,1,o}gh_{1,o} + m_{c,2,o}gh_{2,o} + m_{c,3,o}gh_{3,o}$$

1. $m_{c,1}$ es la masa de la cuerda que cuelga sobre m_1 y h_1 es la altura de su centro de masa. Claramente

$$m_{c,1} = m_c \frac{L - y_1}{L + \pi R + 2R}$$

$$d_1 = y_1 + \frac{L - y_1}{2}$$

2. $m_{c,2}$ es la masa de la cuerda que cuelga sobre m_2 y h_2 es la altura de su centro de masa.

$$m_{c,2} = m_c \frac{L - y_2}{L + \pi R + 2R}$$

$$d_2 = y_2 + \frac{L - y_2}{2}$$

3. $m_{c,3}$ es la masa de la cuerda que esta sobre la polea y h_3 es la altura de su centro de masa. Como tanto inicial como final la energía potencial de este pedazo no cambia, no es necesario calcularla.

$$m_{c,3,f} = m_{c,3,o}$$

$$d_{3,o} = d_{3,f}$$

Pero tenemos la restricción que

$$L = (L - y_1) + (L - y_2)$$

Finalmente tenemos la polea, las masas y la cuerda en movimiento. Por lo tanto, la energía final es

$$E_f = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_p\omega^2 + m_1gL$$

$$= KE_c + m_{c,1,f}gh_{1,f} + m_{c,2,f}gh_{2,f} + m_{c,3,f}gh_{3,f}$$

La energía cinética de la cuerda es

$$KE_c = \frac{1}{2}m_c v_c^2$$

ya que toda la cuerda se esta moviendo con la misma velocidad. Inicialmente tenemos $y_1 = 0$ e $y_2 = L$. Finalmente tenemos $y_1 = L$ e $y_2 = 0$. Aquí es importante darse cuenta que necesitamos relacionar v_1 con v_2 con ω con v_c . Claramente

$$v_1 = -v_2 = -R\omega = v_c = v_f$$

si la polea no cambia de altura. Podemos ahora resolver $E_i = E_f$ y encontrar

$$v_f = \sqrt{2gL \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{I_p}{R^2}}}$$

Lo único que cambia es que ahora tenemos que gastar energía en mover la cuerda.

Problema: Resuelva el problema de la máquina de Atwood si la cuerda tiene masa m_c y largo $L + \pi R + 2R$. Use leyes de fuerza.

Notemos de la Fig. 17b que tanto la fuerza de gravedad como la fricción ejercen torque sobre la cuerda y polea (por acción-reacción). Notemos que para un pedazo de masa de la cuerda tenemos

$$d\tau_g = -dm g \hat{j} \cdot \hat{t} R = -dm g R \sin \theta$$

$$d\tau_s = +f_s \hat{t} \cdot \hat{t} R = R f_s$$

Por lo tanto al integrar de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ usando la densidad de masa por largo

$$\lambda = \frac{m_c}{L + \pi R + 2R}$$

y $dm = R\lambda d\theta$ obtenemos

$$\tau_g = \int_0^\pi d\tau_g = -gR^2\lambda \int_0^\pi \cos \theta d\theta = 0$$

$$\tau_s = \int_0^\pi d\tau_s = R^2\lambda \int_0^\pi f_s d\theta$$

Por acción y reacción este es el mismo torque que siente la polea. Mirando el diagrama de fuerzas de la Fig. 17c tenemos

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T_{c,1} - m_1 g \\ m_2 a_2 &= T_{c,2} - m_2 g \\ m_{c,1} a_{c,1} &= T_{p,1} - T_{c,1} - m_{c,1} g \\ m_{c,2} a_{c,2} &= T_{p,2} - T_{c,2} - m_{c,2} g \\ I_{c,3} \alpha_c &= T_{p,1} R - T_{p,2} R + \tau_{c,p} \\ I_p \alpha_p &= -\tau_{c,p} \end{aligned}$$

Donde tenemos que encontrar $\tau_{c,p}$ que es la fuerza de fricción entre la cuerda y la polea que permite que el sistema ruede. Como no sabemos la magnitud de esta fuerza, tenemos que resolverla directamente de las ecuaciones. Si la cuerda no se resbala, tenemos las restricciones

$$a_1 = -a_2 = a_{c,1} = -a_{c,2} = -R\alpha_c = -R\alpha_p$$

donde

$$m_{c,1} = m_c \frac{L - y_1}{L + \pi R + 2R}$$

$$m_{c,2} = m_c \frac{L - y_2}{L + \pi R + 2R}$$

Podemos resolver el álgebra y obtener

$$a_1 = \frac{d^2 y_1}{dt^2} = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{I_p}{R^2}} + g \frac{2y_1 - L}{L + \pi R + 2R} \frac{m_c}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{I_p}{R^2}}$$

Aun cuando parece que esto es difícil de resolver notamos inmediatamente que podemos escribirlo como

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -ky_1 + k\delta = -k(y_1 - \delta)$$

$$k = -g \frac{L(m_1 - m_2 + m_c) + (m_1 - m_2)(\pi + 2)R}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{I_p}{R^2}} \frac{1}{L + \pi R + 2R}$$

$$\delta = -g \frac{2gm_c}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{I_p}{R^2}} \frac{1}{L + \pi R + 2R}$$

Notamos que esto es parecido a un resorte, y por lo tanto sabemos que si definimos

$$\epsilon = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}k(y_1 - \delta)^2$$

tenemos que

$$\epsilon_i = \epsilon_f \quad \rightarrow$$

Con $y_{1,o} = 0$, $v_{1,o} = 0$, $y_{1,f} = L$ podemos resolver $y_{1,f} = v_f$

$$v_f = \sqrt{2gL \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{I_p}{R^2}}}$$

que es el mismo resultado anterior. El torque de fricción es

$$\tau_s = \frac{I_p}{R} a_1$$

Mirando el problema de mas abajo veremos que

$$\tau_s \leq R\mu_s v_c^2 \pi \frac{m_c}{L + 2R + \pi R}$$

Por lo tanto el sistema va a funcionar mientras

$$-\frac{I_p}{r}k(y_1 - \delta) \leq R\mu_s v_c^2 \pi \frac{m_c}{L + 2R + \pi R}$$

lo que define una restricción extrema para las masas cuando $y_1 = L$ y $v_c = v_f$ llega al suelo.

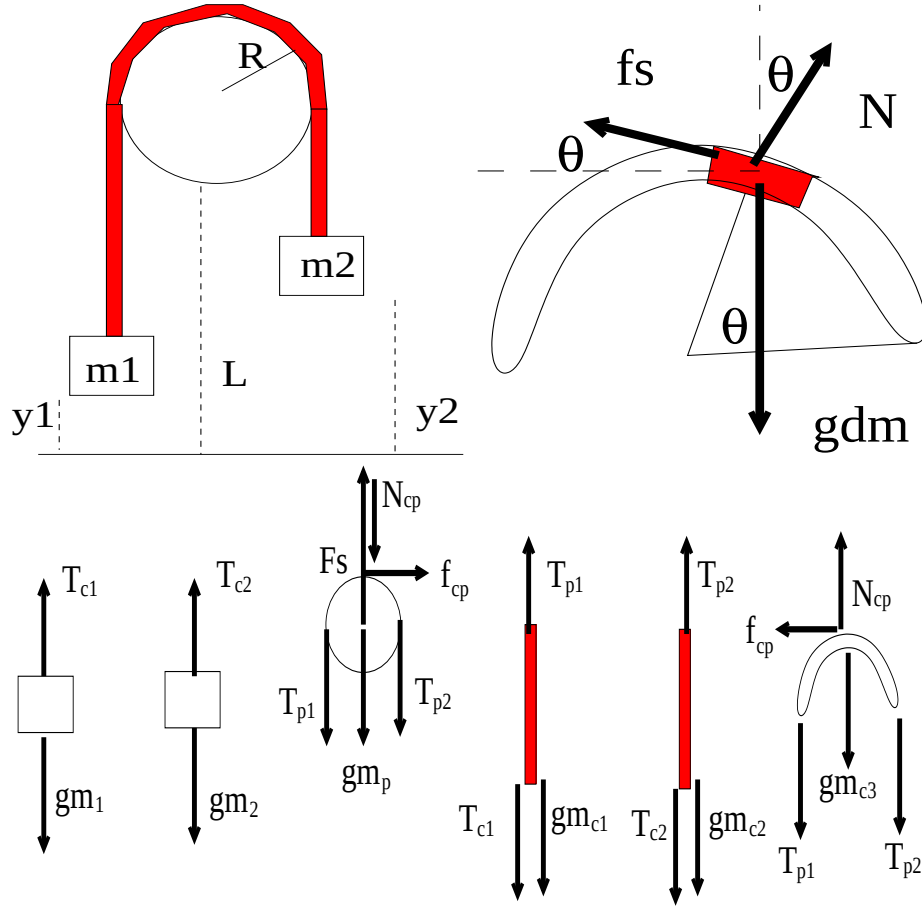


Figura 17: (a) Atwood con cuerda con masa, (b) Diagrama de fuerza para un pedazo de la cuerda. (c) Diagrama de fuerzas completo.

Problema Atwood pero con la cuerda resbalando y utilizando una constante de fricción dinámica sobre la polea.

En este caso tenemos que resolver el problema de arriba, pero tenemos que evaluar el torque producido por la fricción dinámica. El pedazo de masa dm de la Fig. 17b siente en la dirección normal las fuerzas

$$dma_r = N - dm g \cos \theta$$

pero como el movimiento es circular, a_r es la fuerza centrípeta

$$a_r = \omega_c^2 R = \frac{v_t^2}{R} \quad \rightarrow \quad N = dm \left[g \cos \theta + \frac{v_t^2}{R} \right]$$

si integramos sobre el ángulo con $dm = \lambda R d\theta$, tenemos

$$\begin{aligned} \tau_s = \int_0^\pi R f_s = R \int_0^\pi \mu_k N &= R^2 \mu_k \lambda \int_0^\pi \left[g \cos \theta + \frac{v_t^2}{R} \right] d\theta \\ &= R \mu_k \lambda v_t^2 \pi \\ &= R \mu_k v_t^2 \pi \frac{m_c}{L+2R+\pi R} \end{aligned}$$

lo cual tiene sentido porque la gravedad no debería afectar la rotación de la cuerda. Ahora solo tenemos que resolver las ecuaciones de movimiento con las restricciones correctas

$$a_1 = -a_2 = a_{c,1} = -a_{c,2}$$

$$v_1 = -v_2 = v_{c,1} = -v_{c,2} = v_{c,t}$$