Capitulo 8: Momento Angular

Índice

Hasta ahora hemos trabajado con cuerpos que rotan con su eje fijo en el tiempo y en el espacio. En ese caso era conveniente definir el momento de inercia con respecto a este eje y el torque con respecto a este eje. Cuando tenemos situaciones mas complicadas es mas útil definir las rotaciones con respecto a un origen especifico. De allí sale naturalmente la definición vectorial de **momento angular** y **torque**.

1. Producto vectorial

Anteriormente definimos el producto escalar. Ahora definiremos el producto vectorial

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

como el vector que tiene magnitud

$$|\vec{c}| = |A||B| \sin \theta$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como se muestra en la Fig. 1a. Notemos que su magnitud es precisamente la superficie del paralelogramo que definen los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, ya que la altura del paralelogramo es $h = |A| \sin \theta$ y su base $|B|$.

La dirección de $\vec{C}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$, pero todavía nos toca definir cual de las dos posibles dirección, hacia adentro o afuera del plano. En el mundo occidental se usa la convención de **la mano derecha**: La palma de la mano se mueve de $\vec{A}$ a $\vec{B}$, y el pulgar define la orientación del vector.

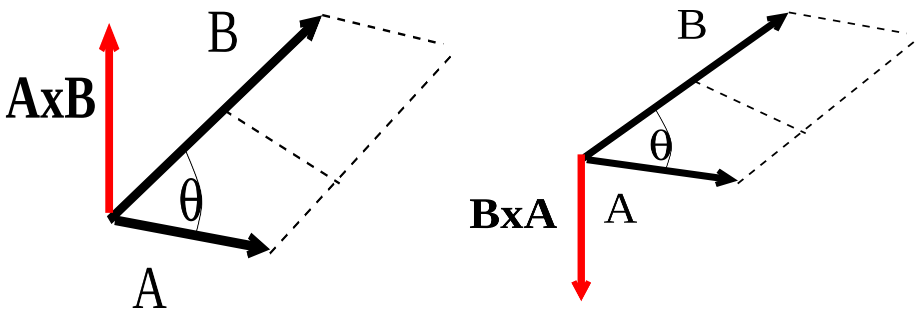

Figura 1: (a) Producto vectorial. (b) convención de la mano derecha.

Por lo tanto algunas propiedades del producto vectorial son:

1. Si los vectores son paralelos, entonces

$$\vec{A} \times (\alpha \vec{A}) = 0$$

2. Por la regla de la mano derecha

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

como se observa en la Fig. 1b.

3. Claramente el producto cruz obedece

$$\vec{C} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B}$$

4. Claramente tenemos en termino de vectores unitarios

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \qquad \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} \qquad \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

5. Con esta definición es fácil probar que el producto vectorial entre 2 vectores se puede escribir fácilmente como el siguiente determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\imath} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\jmath} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$$

Problema: Pruebe que la expresión en termino de determinantes funciona para las 3 relaciones de vectores unitarios.
Tenemos entonces

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 1\hat{k} = \hat{k}$$

y

$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} = \hat{\imath}$$

y

$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} + 0\hat{k} = \hat{\jmath}$$

Problema Calcule la derivada del producto vectorial.

Ya que es un producto de vectores, su derivada es

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

2. Velocidad angular como vector

A medida que el eje de rotación de un cuerpo esta cambiando de orientación, es conveniente considerar la dirección de este eje de rotación construyendo el vector $\vec{\omega}$ de velocidad angular. El cual tiene magnitud

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Acordemonos que el signo de ω depende de nuestra definición de θ, pero en general utilizando la definición que se muestra en la Fig. 2a tenemos que $\omega > 0$ si se mueve **en contra de las manecillas del reloj**, y $\omega < 0$ si se mueve **con las manecillas del reloj**. De la misma forma la dirección del vector $\vec{\omega}$ depende de la convención que usemos para definir θ.

En el mundo occidental se usa la convención que si tenemos un cuerpo rotando como se observa en la Fig. 2b, la dirección de ω es en el plano perpendicular a los vectores $\vec{\rho}$ y $\vec{v}$, donde **el vector $\vec{\rho}$ es con respecto al eje de rotación**. En este caso claramente la convención de **la mano derecha** aplicada a $\vec{\rho} \times \vec{v}$ nos dice inmediatamente la dirección de ω que es consistente con la convención de las manecillas del reloj.

Notemos la diferencia entre el vector $\vec{r}$ (con respecto al origen) y el vector $\vec{\rho}$ (con respecto al eje de rotación).

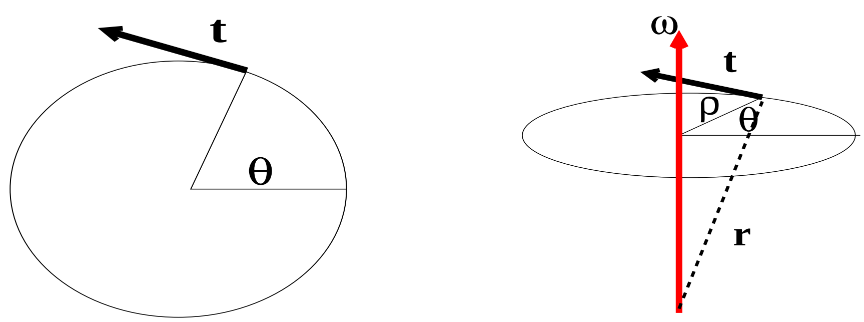

Figura 2: (a) Definición de θ. (b) Dirección de ω.

El vector $\vec{v}$ se puede entonces encontrar como

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Problema: Cual es la velocidad de un cuerpo en la superficie de la tierra como función de la latitud λ y longitud ϕ.

Partimos con $\vec{\omega} = \omega_o \hat{z}$ y con un cuerpo en la superficie de la tierra como

$$\vec{r} = R(\cos\lambda \sin\phi, \cos\lambda\cos\phi, \sin\lambda)$$

Por lo tanto la velocidad es

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ R\cos\lambda\sin\phi & R\cos\lambda\cos\phi & R\sin\lambda \end{bmatrix} = \omega_o R\cos\lambda \left[-\sin\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}\right]$$

o

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega_o R\cos\lambda\hat{t}$$

lo que dice que los objetos se mueven en un circulo de radio R paralelo al Ecuador con magnitud $|v| = \omega_o R\cos\lambda$

Problema: Cual es la velocidad en Bogota? Usando $R = 6300$ km

$$|\vec{v}| = \omega R = \frac{2\pi R}{1dia} = \frac{2\pi R}{24hrs} = 1700km/hr$$

ya que $\lambda \sim 0$.

3. Momento angular y Torque

Hasta ahora hemos trabajado con cuerpos que rotan con su eje fijo en el tiempo y en el espacio. En ese caso era conveniente definir el momento de inercia con respecto a este eje y el torque con respecto a este eje. Cuando tenemos situaciones mas complicadas es mas útil definir las rotaciones con respecto a un origen especifico, no un eje. De allí sale naturalmente la definición vectorial de **momento angular** y **torque**.

3.1. Momento Angular

El momento angular se puede definir como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

de tal forma que si $\vec{r}$ y $\vec{v}$ están en un plano $\vec{L}$ es en la dirección perpendicular. Pero $\vec{r}$ y por lo tanto $\vec{L}$ depende del origen que elijamos.

Supongamos que tenemos una partícula que se mueve en un circulo

$$\vec{r}(t) = \rho_o\cos\theta\widehat{i} + \rho_o\sin\theta\widehat{j} = \rho_o\hat{\rho}$$

donde $\hat{\rho}$ es en la dirección hacia el eje de rotación. Entonces usando

$$\vec{v} = \rho_o \frac{d\theta}{dt} \left(-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j} \right) = \rho_o \omega \hat{t}$$

donde $\hat{t}$ es la tangente al circulo. Podemos calcular el momento angular con respecto al origen del circulo y por lo tanto

$$\vec{L} = m\rho_o^2 \omega \hat{k} = m\rho_o^2 \vec{\omega}$$

ya que el vector $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$. Entonces

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

para una partícula en movimiento circular con el origen en su centro de rotación (el cual esta fijo en el espacio). Si sumamos sobre muchas masas m_i, el momento angular alrededor del centro de rotación es

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

por lo tanto $\vec{L}$ es paralelo a ω. El problema esta en que los cuerpos tienen tamaño en la dirección z, y ahora no buscamos la distancia al eje de rotación, sino a un origen particular.

Que pasa si consideramos otro origen? (diferente al centro del circulo) Notemos que si calculamos el momento angular con respecto a otro origen

$$\vec{r}(t) = \rho_o \hat{\rho} + \vec{r}_o$$

usando

$$\vec{v} = \rho_o \omega \hat{t}$$

tenemos

$$\vec{L} = m\rho_o^2 \vec{\omega} - m\rho_o \omega (\vec{r_o} \times \hat{r})$$

ya que el vector sigue siendo $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$. Notemos que el vector ω no se construye con el vector $\vec{r}$ sino mas bien con $\rho_o \hat{\rho}$ que es el vector al eje de rotación. Por lo tanto en este caso el momento angular no es paralelo al vector ω.

Notemos eso si que si tenemos un anillo de masa m y radio R que da vueltas alrededor de su eje de simetría, en este caso el eje z, entonces

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\
&= mR^2 \vec{\omega} + mR\omega \sum_i (\vec{r_o} \times \hat{t}) \\
&= mR^2 \vec{\omega} + mR\omega \vec{r_o} \times \sum_i (\hat{t}_i) \\
&= mR^2 \vec{\omega} \\
&= I\vec{\omega}
\end{aligned}$$

dado que $\sum_i \hat{t}_i = 0$ para un objeto simétrico. En forma similar, para un disco tenemos

$$\vec{L} = \frac{M}{2} R^2 \omega \hat{k} = I\vec{\omega}$$

el momento angular es paralelo al vector $\vec{\omega}$ siempre y cuando el disco este rotando alrededor de su eje de simetría. Lo mismo aplica para cualquier objeto simétrico rotando alrededor de su eje de simetría.

3.2. Teorema del eje paralelo

Supongamos que tenemos un cuerpo que rota alrededor de un eje paralelo a una distancia d_0 de su centro de simetría o centro de masa. El centro de masa hace un circulo alrededor de este nuevo eje

$$\vec{r} = d_0 \cos\theta \hat{i} + d_0 \sin\theta \hat{j}$$

Si la velocidad angular es constante tendríamos $\theta(t) = \omega t$. La masa m_i que inicialmente esta a un ángulo inicial θ_i y distancia ρ_i con respecto al centro de masa se mueve en el nuevo circulo

$$\vec{r}(t) = [d_0 \cos\theta + \rho_i \cos(\theta + \theta_i)]\, \hat{i} + [d_0 \sin\theta + \rho_i \sin(\theta + \theta_i)]\, \hat{t} + \vec{r_o}$$

Primero asumamos que $\vec{r_o} = 0$ osea estamos en el nuevo eje de rotación como origen. Para la masa m_i podemos calcular el momento angular

$$\vec{L}_i = m_i \left[d_0^2 + \rho_i^2 + 2d_0\rho_i \cos\theta_i\right] \vec{\omega}$$

dado que $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$.

Si el objeto es simétrico con θ_i en $[0, 2\pi]$, entonces

$$\vec{L} = (I_{com} + md_0^2)\vec{\omega}$$

Notemos que esto funciona para cualquier objeto rotando alrededor de un eje paralelo al de simetría.

Esto mismo aplica para el caso de una barra al pasarnos del eje del centro de masa a un borde

$$\vec{L} = (I_{com} + md_0^2)\vec{\omega}$$

lo cual es consistente con la transformación al eje paralelo del momento de inercia.

3.3. Torque

Calculemos la derivada temporal del momento angular

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{r}_i \times \vec{v}_i \\
&= \sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i + \sum_i m_i\vec{r} \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} \\
&= \sum_i \vec{r} \times \left[m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right] \\
&= \sum_i \vec{r} \times \vec{F} \\
&= \vec{\tau}
\end{aligned}
$$

lo que define el torque con respecto a un origen (ya no es con respecto a un eje de rotación). Tenemos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

Notemos que para un cuerpo en rotación alrededor de un eje de simetría que se mantiene fijo en el tiempo, tenemos que

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad \rightarrow \qquad \vec{\tau} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

Problema: Resuelva el problema de la máquina de Atwood anteriormente descrito usando momento angular y torques.

Podemos calcular el momento angular con respecto al eje de rotación de la polea. Si el plano de la máquina de Atwood es el plano x-y, vemos que $\vec{L} = L_z\hat{k}$. Entonces

$$L_z = -m_1Rv_1 + m_2Rv_2 + I\omega$$

Aquí es importante considerar los signos correctamente ya que y_1 e y_2 aumentan hacia arriba. Estos signos se pueden encontrar directamente de

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= -R\hat{i} + y_1\hat{j} \\
\vec{r}_2 &= R\hat{i} + y_2\hat{j}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= v_1\hat{j} \\
\vec{v}_2 &= v_2\hat{j}
\end{aligned}
$$

Los signos los impondremos con las restricciones después. Notemos que estamos asumiendo que el origen es en el eje de simetría de la polea (así podemos usar que $\vec{L} = I\vec{\omega}$), en este caso en el centro de la polea. Podemos también calcular el torque viendo las fuerzas sobre cada objeto

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= -m_1g\hat{j} + T_1\hat{j} \\
\vec{F}_2 &= -m_2g\hat{j} + T_2\hat{j} \\
\vec{F}_p &= -T_1\hat{j} - T_2\hat{j}
\end{aligned}
$$

Notemos que los torques producidos por las tensiones se cancelan en este caso y tenemos

$$\vec{\tau} = (m_1 g R - m_2 g R)\hat{k}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{lcl} \frac{d}{dt}\left[-m_1 R v_1 + m_2 R v_2 + I\omega\right] & = & (m_1 g R - m_2 g R) \\ -m_1 R a_1 + m_2 R a_2 + I\alpha & = & (m_1 g R - m_2 g R) \\ -m_1 R a_1 + m_2 R a_2 + I\alpha & = & (m_1 g R - m_2 g R) \end{array}$$

ya que $a_1 = -a_2 = a$ y asumiendo que no se resbala y usando la convención de la mano derecha $a = -R\omega$ tenemos

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

que fue el resultado anterior.

3.4. Separación del momento angular

Supongamos que tenemos un cuerpo donde el centro de masa se esta moviendo con respecto a otro origen

$$\vec{r}_{i,L} = \vec{r}_{i,com} + \vec{r}_{com}$$

entonces

$$\begin{array}{lcl} \vec{L}_{com} & = & \sum_i m_i \vec{r}_{i,L} \times \vec{v}_{i,L} \\ & = & \sum_i m_i \left[\vec{r}_{i,com} + \vec{r}_{com}\right] \times \left[\vec{v}_{i,com} + \vec{v}_{com}\right] \\ & = & \sum_i m_i \vec{r}_{i,com} \times \vec{v}_{i,com} + \sum_i m_i \vec{r}_{com} \times \vec{v}_{com} + \sum_i m_i \left[\vec{r}_{i,com} \times \vec{v}_{com} \vec{r}_{com} \times \vec{v}_{i,com} +\right] \\ & = & \sum_i m_i \vec{r}_{i,com} \times \vec{v}_{i,com} + \sum_i m_i \vec{r}_{com} \times \vec{v}_{com} \\ & = & \vec{L}_{rel,com} + M\vec{r}_{com} \times \vec{v}_{com} \end{array}$$

ya que

$$\sum_i m_i \vec{r}_{i,com} = \sum_i m_i \vec{v}_{i,com} = 0$$

ya que son variables con respecto al centro de masa. Con

$$\vec{L}_{rel,com} = \sum_i m_i \vec{r}_{i,com} \times \vec{v}_{i,com}$$

Esto dice que el momento angular se puede separar en el momento angular del centro de masa y el momento angular con respecto al centro de masa. En el caso de la tierra tenemos el movimiento translacional alrededor del sol y el movimiento rotacional alrededor de su eje. Esto sera útil cuando calculemos el movimiento de una rueda.

Problema Encuentre la aceleración del centro de masa del yoyo que se muestra en la Fig. 3a.

Podemos calcular el momento angular como

$$\vec{L} = (I\omega + MRV_{com})\,\hat{k}$$

(dejaremos que las ecuaciones den los signos) y las fuerzas

$$\begin{aligned} \vec{T} &= T\hat{j} \\ \vec{F}_g &= -mg\hat{j} \end{aligned}$$

actúan en

$$\begin{aligned} \vec{r}_T &= -h\hat{j} \\ \vec{r}_g &= R\hat{i} - h\hat{j} \end{aligned}$$

y por lo tanto solo el torque gravitatorio

$$\vec{\tau}_g = -mgR\hat{k}$$

es diferente de cero. Por lo tanto tomando una derivada temporal de momento angular tenemos

$$I\alpha + MRa_{com} = -mgR$$

Con la restricción

$$a_{com} = R\alpha$$

porque tiene el mismo signo y asumiendo que no resbala. Entonces

$$a_{com} = -g\frac{1}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

y la esfera cae primero.

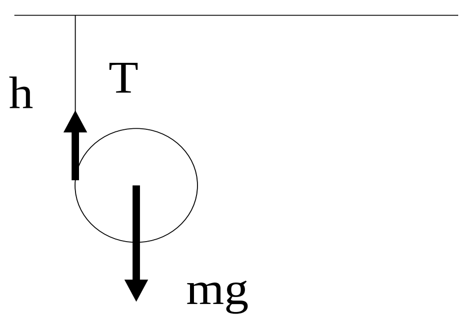

Figura 3: Yoyo

4. Conservación de momento angular

Supongamos que separamos

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,j} + \vec{F}_1^{ext}$$

Entonces podemos observar que dado que las fuerzas internas vienen en pares

$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$$

Al sumar el torque de las dos fuerzas

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times F_{i,j} + \left[r_1 \times \vec{F}_1^{ext} + r_2 \times \vec{F}_2^{ext} \right]$$

Dado que generalmente las fuerzas de acción-reacción son en la dirección entre los dos cuerpos, tenemos que

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times F_{i,j} = 0$$

Si además las fuerzas externas son cero, tenemos que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \vec{L} = const$$

Problema: Supongamos una persona de masa m_p esta al centro de un disco que rota con velocidad angular ω_0, masa m_d y radio R. La persona camina hacia el exterior del disco y salta. Cual es la velocidad angular final. Que paso con la energía.

Si saltamos en forma radial, esto no produce un torque sobre el disco, y por lo tanto hay conservación de momento angular desde que camino del origen hasta el borde del disco.

$$I_d \omega_0 = L_{z,i} = L_{z,f} = I_d \omega_f + m_p R^2 \omega_f$$

Por lo tanto

$$\omega_f = \omega_0 \frac{I_d}{I_d + m_p R^2}$$

La energía cinética inicial era

$$KE_i = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I^2} = \frac{1}{2} I_d \omega_0^2$$

mientras

$$KE_f = \frac{1}{2} \left[I_d + m_p R^2 \right] \omega_f = \frac{1}{2} I_d \omega_0^2 \frac{I_d}{I_d + m_p R^2}$$

por lo tanto la energía disminuye. Claro que al saltar también se pierde la energía cinética de la persona.

Problema: Supongamos que tenemos N+1 personas paradas en el borde del disco. Existe una fuerza de fricción estática que mantiene a estas personas en contacto con el disco. Si N personas se mueven hacia el centro del disco, que condición se tiene que dar para que la persona en el borde salga volando.

. Primero hagamos el diagrama de fuerza. La persona en el borde se mueve en un circulo, por lo tanto tenemos

$$mR\omega^2 = f_s \qquad \rightarrow \qquad \omega^2 \leq \frac{g}{R}\mu_s$$

en todo instante para mantenerse en contacto con el disco. Al caminar personas de masa m_p desde el borde hacia el centro del disco aumenta la velocidad angular

$$(I_d + (N+1)m_p R^2)\omega_0 = L_{z,i} = L_{z,f} = (I_d + m_p R^2)\omega_f$$

o

$$\omega_f = \omega_0 \frac{I_d + (N+1)m_p R^2}{I_d + m_p R^2}$$

Por lo tanto las persona en el borde se quedaran allí mientras

$$\omega_0 \frac{I_d + (N+1)m_p R^2}{I_d + m_p R^2} \leq \sqrt{\frac{g}{R}\mu_s}$$

lo que define el numero de personas que deben de moverse hacia el centro.

Problema: Supongamos que tenemos un péndulo formado por una barra de masa m_b y largo L, y una masa puntual m_p al final de la barra. Una masa m_o que parte de una altura h_0 golpea en forma completamente inelastica con la masa puntual. Cual es la velocidad angular luego de la colisión. Ver Fig. 4.

Teníamos inicialmente una masa m_p que colisiona a velocidad $v_o = \sqrt{2gh_o}$ contra un péndulo de momento de inercia

$$I_p = \frac{1}{3}m_b L^2 + m_p L^2$$

El momento angular inicial y final inmediatamente antes y después del choque con respecto al origen de rotación del péndulo

$$m_o v_o L = L_{z,i} = L_{z,f} = (I_p + m_o L^2)\omega_f$$

Por lo tanto

$$\omega_f = \frac{v_o}{L}\frac{m_oL^2}{I_p + m_oL^2}$$

Por lo tanto en la colisión se perdió

$$KE_f = \frac{1}{2}(I_p + m_oL^2)\omega_f^2 = KE_o\frac{m_oL^2}{I_p + m_oL^2} = m_ogh_o\frac{m_oL^2}{I_p + m_oL^2}$$

El ángulo donde llega este cuerpo se puede resolver por conservación de energía (usemos el origen en el origen de rotación)

$$E_i = \frac{1}{2}(I_p + m_oL^2)\omega_f^2 + (m_b + m_p + m_o)gh_{com,i}$$
$$E_f = (m_b + m_p + m_o)gh_{com,f} = (m_b + m_p + m_o)gh_{com,i}\cos\theta$$

donde

$$(m_b + m_p + m_o)h_{com,i} = -m_b\frac{L}{2} - m_pL - m_oL$$

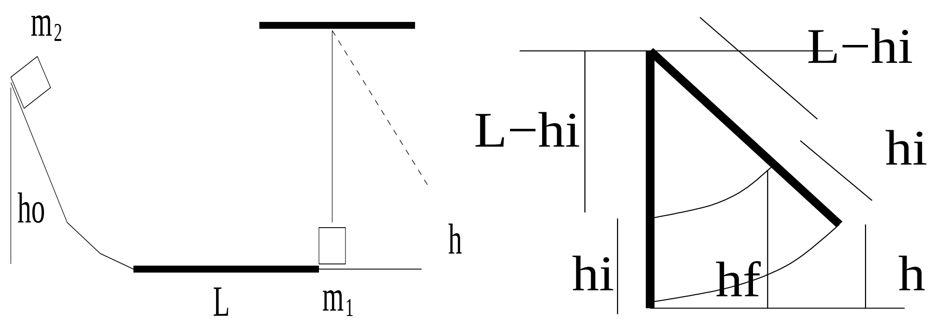

Figura 4: (a) Colisión con el péndulo. (b) Diagrama para calcular h

5. Giróscopo

Es interesante estudiar el problema del giróscopo, ya que aquí el momento angular y la velocidad angular no son paralelos.

Supongamos que tenemos un cuerpo de momento simétrico de momento de inercia I que esta inicialmente rotando alrededor de un eje como se muestra en la Fig. 5a. Vemos que la única fuerza que efectúa un torque (con respecto al origen de la Fig. 5b es

$$\vec{\tau} = mgR\hat{t}$$

Por lo tanto esta claro que el momento de inercia en la dirección radial $\hat{\rho}$ o en la dirección $\hat{z}$ no cambia ya que el torque es en la dirección perpendicular. Pero el torque genera un movimiento en la dirección $\hat{t}$, dado por

$$\frac{dL_t}{dt} = mgR$$

Esta ecuación no es fácil de resolver ya que no conocemos L_z explícitamente, pero si asumimos que esta movimiento es pequeño y no cambia mucho el momento angular total del sistema ($L_z << L_\rho$), entonces podemos usar el siguiente truco. En la practica asumamos que en un intervalo de tiempo pequeño Δt el vector cambia su momento angular de el ángulo θ_o al ángulo θ_f. Si es así, podemos utilizar (aquí asumimos que L en magnitud no cambia mucho)

$$\Delta\theta = \frac{|\Delta L|}{|L|} = \frac{|\tau|\Delta t}{|L|} = \frac{mgR}{I\omega_o}\Delta t$$

Por lo tanto la velocidad angular de precesión es entonces

$$\omega_p = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{mgR}{I\omega_o}$$

Es interesante darse cuenta que esta es una forma de navegar en el espacio en forma inercial. Si el satélite cambia de dirección se genera una fuerza ficticia sobre el giróscopo (en general hay 3 giróscopos rotando en dirección perpendiculares) y por lo tanto una precesión. Notemos que la precesión se detiene cuando la aceleración se detiene. Siguiendo estas precesiones es factible seguir el movimiento del satélite. Esto se usa también en aviones.

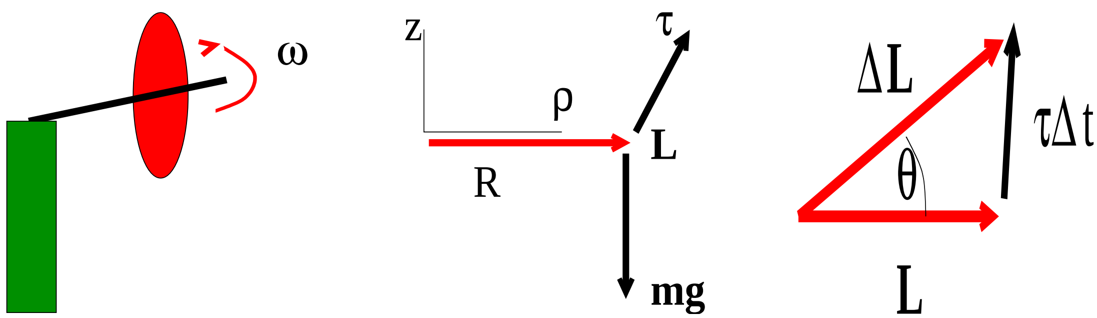

Figura 5: (a) Giróscopo (b) Diagrama de fuerzas. (c) Cambio de momento angular