Capitulo 9: Leyes de Kepler, Gravitación y Fuerzas Centrales

Índice

1. Las 3 leyes de Kepler

Después de muchas observaciones, Kepler escribió sus tres leyes:

1. Los planetas se mueven en orbitas elípticas alrededor del sol
2. La orbita barre áreas iguales en tiempos iguales
3. La relación entre el periodo T y el eje mayor a de la elipse satisface

$$T^2 = ca^3$$

La primera y segunda ley se pueden observar en la Fig. 1

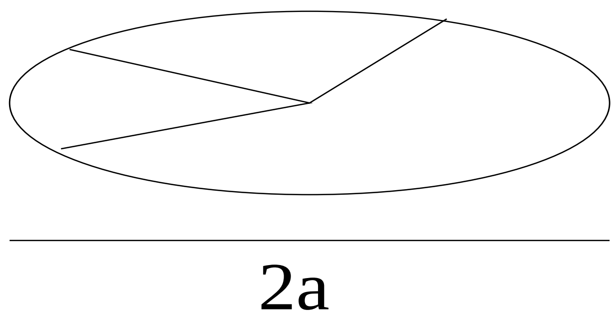

Figura 1: Movimiento elíptico

Las mediciones de Kepler para llegar a la 3ra ley, se pueden apreciar en esta tabla y la Fig. 2a-b. Acordemonos que la aceleración centrípeta para movimiento circular tiene magnitud

$$a_c = \omega^2 r$$

En la Tabla 1 tenemos los valores del periodo y la distancia de los planetas al sol. En la Fig. 2a y Fig. 2b tenemos el gráfico de $a_c r^2$ vs r y $a_c r^2$ vs ω respectivamente. Por lo tanto podemos decir que la fuerza que mantiene a los planetas dando vuelta alrededor del sol satisface

$$T^2 = cr^3$$

esta relación fue utilizada por Newton para escribir su famosa fuerza de la gravedad.

Planeta	Periodo	Distancia
Mercurio	87,97 días	57.910.000 km
Venus	224,7 días	108.200.000 km
Tierra	365,256 días	149.600.000 km
Martes	686,98 días	227.940.000 km
Júpiter	11,86 años	778.330.000 km
Saturno	29,46 años	1.429.400.000 km
Urano	84,01 años	2.870.990.000 km
Neptuno	164,8 años	4.504.300.000 km
Plutón	248,54 años	5.913.520.000 km

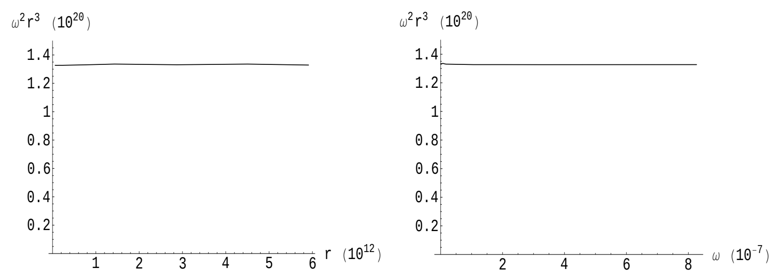

Figura 2: (a) $\omega^2 r^3$ vs r. (b)$\omega^2 r^3$ vs ω

Para orbitas circulares, la fuerza que mantiene a los planetas girando alrededor del sol se puede escribir entonces como

$$a_c = \frac{a_o}{r^2}$$

donde a_o es una constante que se puede encontrar. Por lo tanto la fuerza que ejerce el sol sobre un planeta es en la dirección radial entre los dos cuerpos y con magnitud

$$|\vec{F}_{S,P}| = m_p a_c = \frac{m_p a_o}{r^2}$$

donde m_p es la masa del planeta. Si asumimos que el principio de acción y reacción se da, entonces podemos decir que la fuerza que siente el sol debido a un planeta debería tener la misma forma

$$|\vec{F}_{P,S}| = \frac{m_S a_1}{r^2}$$

pero como las dos fuerzas tiene la misma magnitud, entonces

$$|\vec{F}_{P,S}| = |\vec{F}_{S,P}| = \frac{G m_S m_P}{r^2}$$

con la dirección definida por ser una fuerza de atracción entre los cuerpos y por la linear entre los dos cuerpos (radial). Esto se le denomina una **Fuerza central**. La constante G se puede derivar si conocemos la masa del sol ($m_S = 1{,}989 \times 10^{30}$), la masa de la tierra ($m_P = 5{,}98 \times 10^{24}$ kgs), y la distancia entre la tierra y el sol, lo que da $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$.

La fuerza de gravitación universal, propuesta por Newton, es

$$F_{1,2} = -Gm_1m_2\frac{\hat{r}}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^2} = -Gm_1m_2\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^3}$$

independiente si la trayectoria es circular o no.

Problema: Cual es el periodo en años de Júpiter, si su distancia del sol es $a \approx 5{,}2$ AU.

Dado que para la tierra tenemos $T_E = 1$ año y $a = 1$ AU, podemos usar

$$T_J^2 = T_E^2\frac{a_J^3}{a_E^3} \qquad \rightarrow \qquad T_j = 11{,}85$$

2. Campo gravitacional

Supongamos que tenemos una distribución de masas, podemos escribir la fuerza sobre la masa i como

$$F_i = -\sum_j Gm_im_j\frac{\vec{r_i}-\vec{r_j}}{|\vec{r_i}-\vec{r_j}|^3}$$

Generalmente, se define el campo gravitacional producido por una distribución de masa como la fuerza por unidad de masa que sentiría una masa puesta en algún punto del espacio $\vec{r}$. Esto es

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{1}{m}\vec{F}$$

En términos de una distribución de masa

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{r}) &= \textstyle\sum_j Gm_j\frac{\vec{r}-\vec{r_j}}{|\vec{r}-\vec{r_j}|^2} \\ &= -G\textstyle\sum_j \frac{m_i}{r_i^2}\hat{r}_i \\ &= -G\int \frac{dm}{r^2}\hat{r} \end{aligned}$$

El caso de dos masas puntuales, inmediatamente nos dice que la fuerza es en la dirección entre las dos masas. Lo mismo aplica para el campo en el eje de un circulo como se ve en la Fig. 3a. Por lo tanto el campo fuera de una esfera es en la dirección radial como se ve en la Fig. 3b, ya que es la suma de muchos círculos. De hecho fuera de la esfera tenemos

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

Hay un caso que es extremadamente interesante. Supongamos que estamos dentro de un cascaron hueco de masa M y radio R. Podemos demostrar que el campo gravitacional $\vec{g}$ adentro es cero usando el siguiente argumento. Miremos la Fig. 3c, vemos inmediatamente que la relación entre las masas m_1 y m_2 es

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

y como estas masas generan fuerzas en direcciones opuestas, obtenemos que el efecto neto es cero. Sumando sobre el cascaron nos da finalmente

$$\vec{g}(\vec{r}) = 0 \qquad r < R$$

Para $r > R$ sabemos que el potencial cae como $1/r^2$ y es en la dirección radial. Entonces para el cascaron tenemos

$$\vec{g}(\vec{r}) = \left[\begin{array}{ll} 0 & \qquad r < R \\ -\frac{GM}{r^2} & \qquad r > R \end{array} \right.$$

lo cual se puede escribir como

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM(r)}{r^2}$$

donde $M(r)$ es la masa dentro del radio r. Para el caso de una esfera llena (un planeta) tenemos entonces

$$M(r) = \left[\begin{array}{ll} M\frac{r^3}{R^3} & \qquad r < R \\ M & \qquad r > R \end{array} \right.$$

y el campo gravitacional es

$$\vec{g}(\vec{r}) = \left[\begin{array}{ll} -\frac{GMr}{R^3} & \qquad r < R \\ -\frac{GM}{r^2} & \qquad r > R \end{array} \right.$$

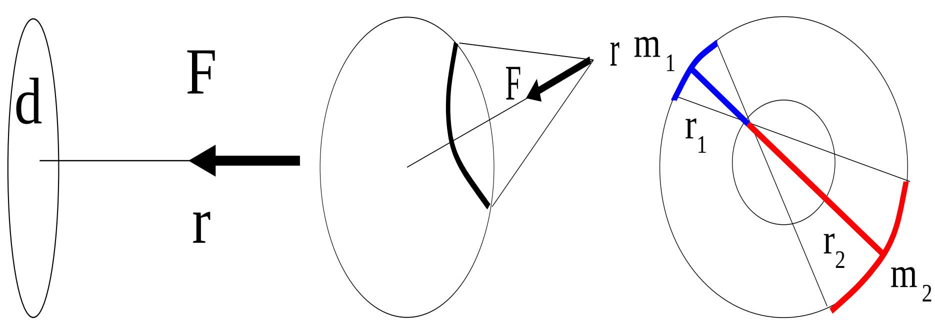

Figura 3: (a) Dentro del cascaron. (b) Fuera del cascaron.

El campo gravitacional en la superficie de un planeta define su aceleración gravitacional

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

y para el caso de la tierra tenemos $g_T = 9{,}8$. Recordemos que la masa del planeta esta relacionada con su densidad

$$M = \rho\frac{4\pi}{3}R^3$$

con lo cual uno puede relacionar aceleraciones gravitacionales en varios planetas.

Problema: Cual es la aceleración de gravedad en la superficie de la luna si su densidad promedio es la mitad de la tierra y tiene un tercio del radio terrestre.

Usando

$$\frac{g_L}{g_R} = \frac{M_L}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2$$

dado que

$$\frac{M_L}{M_T} = \frac{\rho_L}{\rho_T}\left(\frac{R_L}{R_T}\right)^3$$

podemos encontrar

$$\frac{g_L}{g_R} = \frac{\rho_L}{\rho_T}\left(\frac{R_L}{R_T}\right) = \frac{1}{6}$$

3. Conservación de energía

Usemos el principio de conservación de energía

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}_f} m\vec{g}\cdot d\vec{r}$$

Para el caso de un cuerpo cerca de un planeta esférico, podemos usar

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = -GMm\int_{r_o}^{r_f}\frac{1}{r^2}dr = -GMm\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_o}\right)$$

lo que define el potencial gravitatorio

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

y el principio de conservación de energía

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{r_f} = \frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{ro}$$

Notemos que cerca de la tierra $r = R + h$ tenemos

$$U(r) = -\frac{GMm}{R+h} \approx -\frac{GMm}{R} + \frac{GMmh}{R^2} + \ldots$$

que aparte de la constante es $U(r) = mgh$ como teníamos anteriormente.

Problema: Calcular la velocidad de escape de la tierra.

La velocidad de escape es la velocidad inicial necesaria en la superficie de la tierra para que el cohete llegue al infinito con velocidad cero. Osea

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R} \qquad \rightarrow \qquad v_s^2 = \frac{2GM}{R}$$

Por lo tanto desde la superficie de la tierra

$$v_E = \sqrt{2R\frac{GM}{R^2}} = 11 \;\; Km/seg$$

Problema: Calcule el horizonte de un hoyo negro de la masa de la tierra.

El horizonte de un hoyo negro se define como el radio donde ni siquiera la luz puede escapar. Esto, la velocidad de escape de $v_s = c$, y por lo tanto

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} = 0{,}8 \;\; cm$$

Problema: Cuanto cambia la velocidad de escape si el objeto parte del centro de la tierra

En este caso tenemos que hacer la integral en dos partes porque

$$\vec{g}(\vec{r}) = \left[\begin{array}{ll} -\frac{GMr}{R^3} & \qquad r < R \\ -\frac{GM}{r^2} & \qquad r > R \end{array} \right.$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned} W(0\to\infty) &= -GMm\int_0^R \tfrac{r}{R^3}dr - GMm\int_R^\infty \tfrac{1}{r^2}dr \\ &= -\tfrac{GMm}{2R} - \tfrac{GMm}{R} \\ &= -\tfrac{3GMm}{2R} \end{aligned}$$

Entonces, usando

$$-\frac{1}{2}mv_s^2 = W(0\to\infty)$$

obtenemos

$$v_s^2 = \frac{3GM}{R}$$

4. Movimiento circular

En general cuando tenemos un cuerpos haciendo un movimiento circular alrededor de otro, en general los dos hacen el movimiento circular como se muestra en la Fig. 4a. Dado que el centro de masa no acelera (porque no hay fuerzas externas) podemos darnos cuenta que el centro de los círculos es el centro de masa y los radios se relacionan como

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

En el caso en que una de las masas es mucho mayor que las otras (como el sol y los planetas), podemos asumir que la masa mayor esta en el centro del circulo y

$$ma_c = mr\omega^2 = \frac{GMm}{r^2}$$

lo que relaciona

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3}$$

Esta es realmente la relación de Kepler como hemos visto anteriormente.

Problema: Cual es el periodo de un satélite dando vuelta cerca de la tierra ($r \approx R$)

La frecuencia es

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^2}\frac{R^2}{r^3} = 9{,}8\frac{1}{r}$$

por lo tanto

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}4\ hrs$$

Problema: Cual es el radio para tener una orbita geoestacionaria ($T = T_T = 24 \times 3600$ s). En este caso

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

y

$$r = \left(\frac{9{,}8R^2}{\omega^2}\right)^{1/3} = 6{,}6R_E$$

con R_E como el radio de la tierra. Lo que corresponde a una altura de $H = 5{,}6R_E \approx 35000$ km.

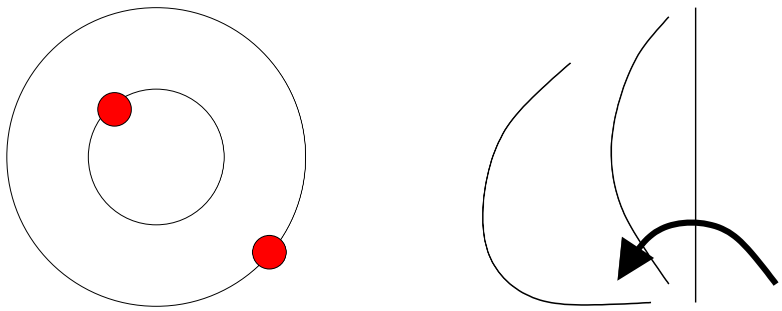

Figura 4: (a) Movimiento circular. (b) Galaxia espiral.

Notemos que esta es una de las razones por la cual tenemos galaxias espirales, ya que el material que esta mas lejos tiene una frecuencia angular ω menor que el materia que esta mas cerca del centro, ver Fig. 4b.

Cuando tenemos un objeto en un circulo con

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3}$$

con $v = r\omega$, obtenemos que

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

que también se puede escribir como

$$E = \frac{U}{2} = -KE$$

Por ejemplo la energía que tenemos que proporcionar para cambiar de una orbita circular $r_o = 2R$ a una orbita $r_f = 3R$ es (con $v = r\omega$)

$$
\begin{aligned}
W = E_f - E_o &= \tfrac{GMm}{2}\left[-\tfrac{1}{r_f}+\tfrac{1}{r_o}\right] \\
&= \tfrac{mR}{2}\tfrac{GM}{R^2}\left[-\tfrac{R}{r_f}+\tfrac{R}{r_o}\right] \\
&= \tfrac{mg_oR}{12}
\end{aligned}
$$

5. Diferentes trayectorias

Cuando la masa de uno de los cuerpos es mucho mayor que el otro, entonces podemos asumir que que el cuerpo mas masivo esta en el centro de masa sin moverse, y el segundo cuerpo siente una fuerza central.

$$
\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}
$$

El torque producido por fuerzas centrales es cero ya que la fuerza es en la dirección de $\vec{r}$

$$
\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0
$$

y por lo tanto $\vec{L}$ es constante. La trayectoria sucede en el plano perpendicular a $\vec{L}$.

La trayectoria se puede entonces describir como

$$
\vec{r} = r(t)\cos\theta(t)\hat{\imath} + r(t)\sin\theta(t)\hat{\jmath} = r(t)\hat{r}
$$

y

$$
\vec{v} = \frac{dr(t)}{dt}\hat{r} + r(t)\omega(t)\hat{t}
$$

Notemos que

$$
|\vec{v}(t)|^2 = \left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 + r(t)^2\omega^2
$$

La conservación de momento angular puede ser calculada como

$$
\vec{L} = mr(t)^2\omega(t)\hat{k} \qquad \rightarrow \qquad |\vec{L}| = L = mr(t)^2\omega(t) = const
$$

y por lo tanto

$$
\frac{1}{2}m|\vec{v}(t)|^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r(t)^2\omega^2\right) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}
$$

El principio de conservación de energía nos permitirá demostrar el tipo de trayectorias que tenemos, y la clasificación se hace con la energía total mecánica

$$
E = \frac{1}{2}m|\vec{v}(t)|^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}\right)
$$

Por lo tanto tenemos un potencial efectivo

$$U_{eff}(t) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

En la Fig. 5a vemos este potencial efectivo para un valor especifico de L. Observemos que tanto el valor de L y E se pueden evaluar con las condiciones iniciales $\vec{v}(0)$ y $\vec{r}(0)$, y nos permiten clasificar las posibles trayectorias:

1. La situación de mínima energía es la orbita circular que tiene

   $$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0 \qquad \rightarrow \qquad r_o = \frac{L^2}{Gm^2M}$$

   dando

   $$E_c = -\frac{GMm}{2r_o} = -\frac{G^2m^3M^2}{2L^2}$$

   No existe una solución de energía menor.

2. Si la energía $E_c < E_e < 0$ entonces tenemos orbitas elípticas con un radio mayor r_2 y un radio menor r_1, donde $2a = r_1 + r_2$. Estos valores se pueden obtener de

   $$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0$$

   o de

   $$U_{eff} = E_e$$

   Esta situación aplica para los planetas. El caso del movimiento circular sucede cuando $r_c = r_1 = r_2$.

3. Si $E = 0$ tenemos la situación de una orbita parabólica tal que la trayectoria se acerca desde el infinito, llega al punto de máximo acercamiento r_p y luego se devuelve al infinito llegando con $v_\infty = 0$.

4. Si $E > 0$ tenemos la situación de una orbita hiperbólica tal que en infinito $v > 0$. Esto aplica para algunos cometas.

Las diferencias se pueden observar en la Fig. 5a.

Las trayectorias se pueden escribir como

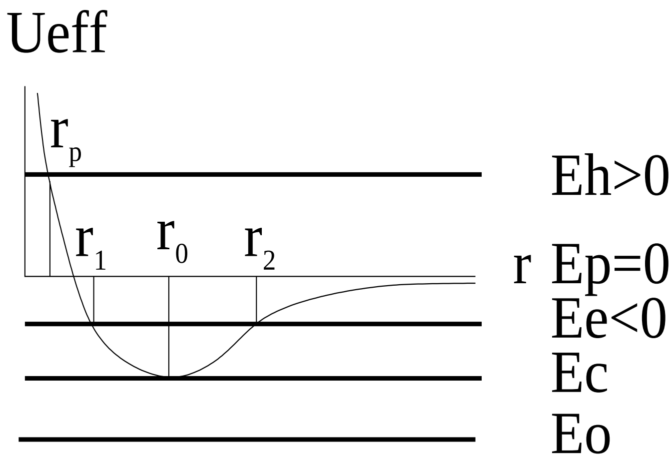

Figura 5: (a) Potencial efectivo.

$$\frac{r}{r_o} = \frac{1}{1 + \epsilon \cos\theta}$$

en coordenadas polares, donde ϵ es la excentricidad de la orbita. Si $\epsilon = 0$ tenemos un circulo, si $\epsilon < 1$ tenemos una elipse, si $\epsilon = 1$ tenemos una parábola, y si $\epsilon > 1$ tenemos una hipérbola.

6. Demostrar Leyes de Kepler

Ahora usando la fuerza gravitacional es fácil probar las leyes de Kepler;

1. La primera ley la demostramos en la sección anterior. Para los planetas aplica la elipse.

2. La segunda ley en realidad determina la ley de conservación de momento angular. El torque producido por fuerzas centrales es cero ya que la fuerza es en la dirección de $\vec{r}$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

y por lo tanto $\vec{L}$ es constante. La trayectoria sucede en el plano perpendicular a $\vec{L}$. Para el caso del circulo, en un intervalo dt barremos un área

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|dt$$

Por lo tanto

$$\frac{dA}{dt} = |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2m}|\vec{L}|$$

el cual es constante.

3. El caso de la tercera ley, la demostramos varias veces arriba. El caso general de cuando las dos masas son comparables es

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

Vemos que observando las trayectorias de un sistema binario podemos averiguar las masas de las estrellas.

7. Cuantización de momento angular y Átomo de Bohr

El momento angular desempeña un papel importante en la teoría de átomos. En general en la mecánica cuántica se parte observando que el modulo del momento angular solo puede tener valores

$$|\vec{L}| = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

donde

$$\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34} \ \ Js$$

Dado que $\hbar$ es muy pequeño la discretización del momento angular es muy difícil de observar, ya que la separación entre estado y estado es muy pequeña. Por ejemplo, si tenemos una masa de $m = 1$ kg, dando vuelta en un circulo de radio $r = 1$ m a una velocidad de $v = 1$ m/s, tenemos que

$$L = mvr \qquad \rightarrow \qquad \ell \approx \frac{L}{\hbar} \approx 10^{34}$$

Esto también implica que la energía esta cuantizada, dado que

$$KE = \frac{L^2}{2I} = \ell(\ell+1)\frac{\hbar^2}{2I}$$

Durante mucho tiempo existió un problema que no se le veía solución y que tenia que ver con el movimiento de un electrón alrededor de un protón. Cuando una particular se mueve en un circulo, debería radiar, y por lo tanto los átomos no deberían ser estables. En la mecánica cuántica se dice que el problema se resuelve al existir probabilisticamente estados discretos donde el electrón puede estar sin perder energía. Asumamos que tenemos la atracción de un núcleo de carga Z positivo y un electrón, donde el potencial se escribe como

$$U = -\frac{kZe^2}{r}$$

Este potencial es muy parecido al potencial gravitacional, por lo tanto para orbitas circulares tenemos

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{kZe^2}{r} = -\frac{kZe^2}{2r}$$

el cual es negativo, ya que representa la cantidad de energía que tenemos darle al átomo para separar el núcleo y el electrón. A esta energía se le denomina también **energía de ionización**

$$E_{ion} = \frac{kZe^2}{2r}$$

Si asumimos que el momento angular esta cuantizado como se sugiere arriba, entonces para una orbita circular

$$mvr = n\hbar$$

Dado que

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{kZe^2}{2r} \qquad \rightarrow \qquad v^2 = \frac{kZe^2}{rm}$$

podemos encontrar que

$$\left(\frac{n\hbar}{mr}\right)^2 = v^2 = \frac{kZe^2}{rm}$$

lo que implica que

$$r_n = n^2\frac{a_0}{Z} \qquad \rightarrow \qquad a_0 = \frac{\hbar^2}{m^2ke^2} = 0{,}5\ A$$

en unidades de Angstroms (10^{-10} m). La energía del átomo es entonces

$$E_n = -\frac{kZe^2}{2r_n} = -Z^2\frac{E_o}{n^2} \qquad \rightarrow \qquad E_0 = \frac{1ke^2}{a_0} = 13{,}6\ eV$$

donde la unidad de energía es $eV = 1{,}6 \times 10^{-19}J$.

Por ejemplo, ahora nos damos cuenta que si queremos que el átomo pase del estado $n = 1$ al estado $n = 2$, tenemos que darle la cantidad

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -Z^2E_o\left[\frac{1}{4} - 1\right] = 3Z^2\frac{E_o}{4}$$

de energía. El signo positivo indica que esta energía tiene que ser proporcionada al átomo. Si estamos en el estado $n = 2$, el átomo puede hacer la transición al estado base $n = 1$ liberando esta energía en la forma de un fotón que podríamos observar. La energía de ionización para pasar del estado $n = 1$ al estado $n \rightarrow \infty$ es

$$E_{ion} = -Z^2 E_o$$

Para esta energía tenemos un foton ultravioleta dado que

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = 2 \times 10^{16}\; rad/s \qquad \rightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = 15\; A$$

Esta energía podría parecer minúscula, pero es importante notar que si esta energía es proporcionada por un electrón a través de una colisión inelastica con el átomo, este electrón necesita tener al menos una energía cinética

$$KE = \frac{1}{2} m_e v^2 = Z^2 E_o \qquad \rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2E_o}{m_e}} \approx 2 \times 10^6\; m/s$$

para $Z = 1$. Osea el 1 % de la velocidad de la luz.