Problemas Capitulo 2

Profesor: *Alejandro Valdivia*

Problema 1: Tenemos una masa m con una velocidad inicial v_o (a nivel del suelo) que se mueve sobre un plano inclinado sin fricción como se muestra en la Fig. 1.

1. Encuentre la velocidad inicial mínima v_{min} para llegar al tope del plano inclinado, el cual tiene un largo L.
2. Supongamos que $v_o > v_{min}$, encuentre la velocidad v_t que la masa tiene al llegar al tope del plano inclinado
3. Encuentre la distancia R a la que llega la masa en termino de v_o, v_{min}, θ. **Útil:** Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x_\pm = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$.

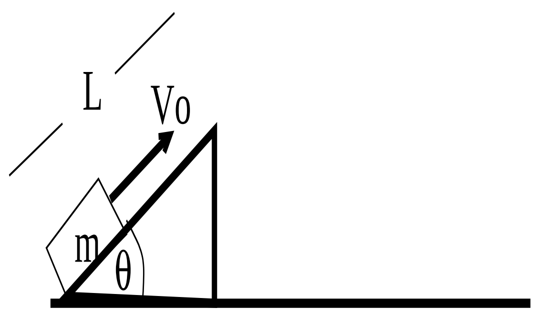

Figura 1: (a) Diagrama

Solución Problema 1:

1. Primero necesitamos encontrar las fuerzas que actúan sobre la masa m. En este caso conviene usar el sistema de referencia de la Fig. 2. En este sistema tenemos

$$\begin{aligned} ma_x &= -mg\sin\theta \\ ma_y &= N - mg\cos\theta \end{aligned}$$

   donde $a_y = 0$. Por lo tanto si el cuerpo quiere llegar al tope del plano inclinado, necesitamos encontrar $v_o = v_{min}$ tal que $v_f = 0$ cuando $\Delta x = x_f - x_i = L$. Podemos utilizar

$$v_f^2 - v_o^2 = 2a_x\Delta x \qquad \rightarrow \qquad v_{min} = \sqrt{2gL\sin\theta}$$

2. Si $v_o > v_{min}$ entonces la velocidad al tope del plano inclinado va a ser $v_f = v_t > 0$. Nuevamente podemos utilizar

$$v_f^2 - v_o^2 = 2a_x\Delta x \qquad \rightarrow \qquad v_t = \sqrt{v_o^2 - 2gL\sin\theta}$$

   Notemos que $v_o^2 > 2gL\sin\theta$ por construcción.

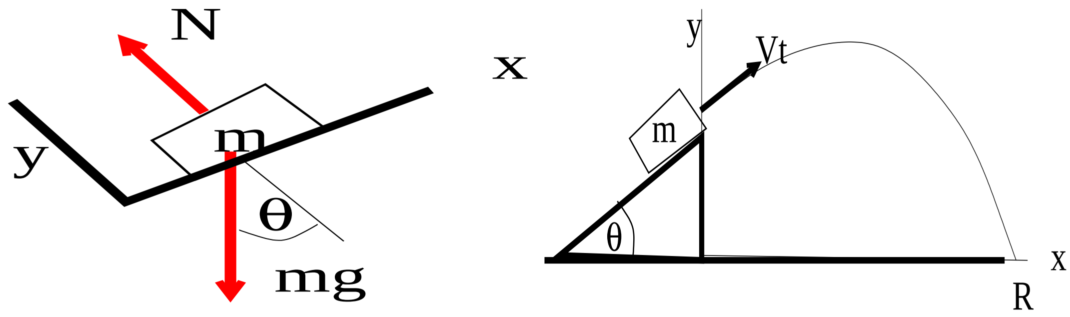

Figura 2: (a) Diagrama de fuerzas. (b) sistema de coordenadas utilizada luego de superar el tope del plano inclinado $v_t > v_{min}$.

3. Si el cuerpo logra superar el tope del plano, $v_t > 0$, entonces tenemos el problema de trayectoria parabólica (movimiento uniformemente acelerado), donde las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} x(t) &= v_t t \cos\theta \\ y(t) &= L\sin\theta + v_t t \sin\theta - \tfrac{g}{2} t^2 \end{aligned}$$

Notemos que ahora cambiamos al sistema de coordenadas donde y esta orientado con la gravedad, como se muestra en la Fig. 2b. En este caso la nueva velocidad inicial tiene magnitud v_t, pero con componentes $v_{0,x} = v_t \cos\theta$ y $v_{0,y} = v_t \sin\theta$. El cuerpo sale desde una altura $h = L\sin\theta$. En algún instante del t_s, la masa llega al suelo, donde podemos calcular la distancia R como

$$\begin{aligned} x(t_s) &= R \\ y(t_s) &= 0 \end{aligned}$$

De la segunda expresión podemos despejar t_s (utilizando la ayuda del enunciado) como

$$t_s = \frac{-v_t \sin\theta \pm \sqrt{v_t^2 \sin^2\theta + 2gL\sin\theta}}{-g}$$

La única solución razonable es la positiva y tenemos

$$t_s = \frac{v_t \sin\theta + \sqrt{v_t^2 \sin^2\theta + 2gL\sin\theta}}{g}$$

por lo tanto

$$R = x(t_s) = \frac{v_t^2 \cos\theta}{g}\left[\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \left(\frac{v_{min}}{v_t}\right)^2}\right]$$

Problema 2: Supongamos que tenemos el gráfico para la velocidad de un cuerpo de masa $m = 10$ kg como se muestra en la Fig. 3a-b. Este cuerpo satisface $\vec{r}(0) = 100\hat{j}$ m.

1. Que fuerza genera este movimiento? Escriba la ecuación vectorial y grafique los componentes
2. En que posición se encuentra el cuerpo en $t = 4$ seg.
3. Encuentre $\vec{r}(t)$ entre $t = 0$ y $t = 4$. Escriba la ecuación.

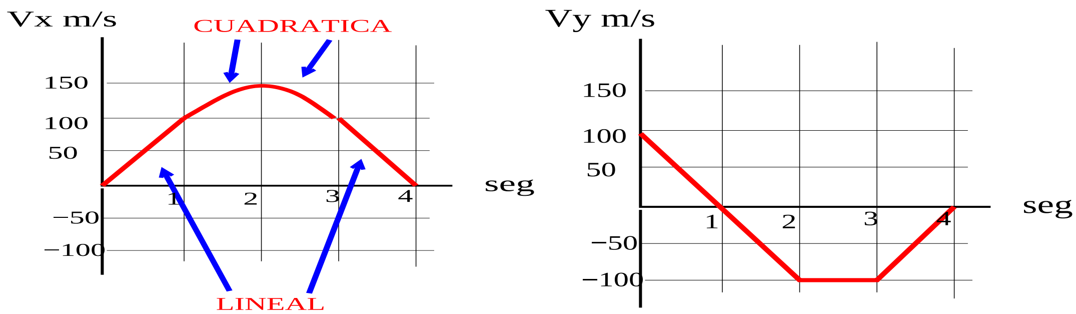

Figura 3: (a) V_x, (b) V_y

Solución Problema 2:

1. Sabemos que la fuerzas son

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x = m\tfrac{dv_x}{dt} \\ F_y &= ma_y = m\tfrac{dv_y}{dt} \end{aligned}$$

Tomemos la derivada de las velocidades para obtener el gráfico de la Fig. 4a-b.

a) Es importante notar que a_x es constante en el intervalo $t : 0 \rightarrow 1$ con $a_x = 100$ m/s^2 y en el intervalo $t : 0 \rightarrow 1$ con $a_x = -100$ m/s^2. Dado que en el intervalo $t : 1 \rightarrow 3$ tenemos una variación lineal para a_x (v_x es cuadrática), solo tenemos que conectar con una linear recta como se muestra en la Fig. 4a. La ecuación es

$$F_x = ma_x = \left[\begin{array}{ll} 1000 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1000 - 1000(t-1) & 1 \leq t \leq 2 \\ 1000 - 1000(t-1) & 2 \leq t \leq 3 \\ -1000 & 3 \leq t \leq 4 \end{array} \right.$$

en Newtons.

b) El caso de a_y es mas fácil. Las pendientes son constantes en todos los intervalos. La ecuación es

$$F_y = ma_y = \left[\begin{array}{ll} -1000 & 0 \leq t \leq 1 \\ -1000 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & 2 \leq t \leq 3 \\ 1000 & 3 \leq t \leq 4 \end{array} \right.$$

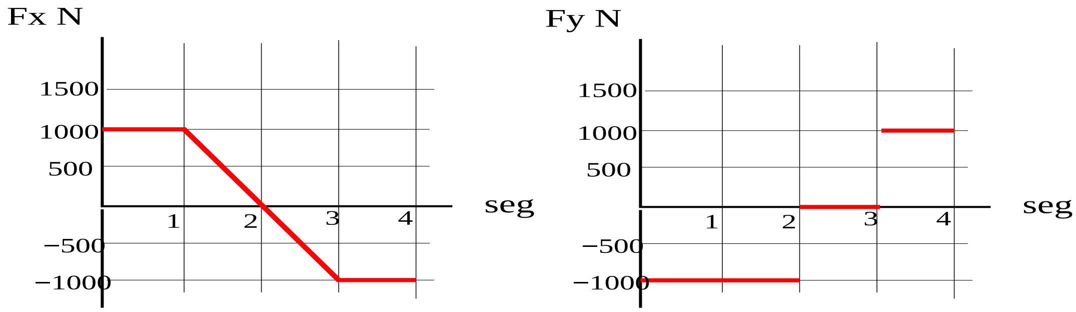

Figura 4: (a) F_x, (b) F_y

2. La forma mas fácil de calcular la distancia integrando bajo la curva, pero es mas instructivo construir $\vec{r}(t)$ por intervalos. Por lo tanto miremos la siguiente parte.

   a) Para el caso de $x(t)$. Sabemos que en el intervalo $t : 0 \to 1$ tenemos un movimiento uniformemente acelerado con $x(0) = 0$,$v_o = 0$

   $$x(t) = \frac{100}{2}t^2$$

   con $x(1) = 50$ m.

   b) Para el intervalo $t : 1 \to 3$ tenemos una linear para la aceleración

   $$a_x(t) = 100 - 100(t-1)$$

   Para la velocidad tenemos

   $$v_x(t) = v_x(1) + \int_1^t a_x(\tau)d\tau = 100 + 100(t-1) - \frac{100}{2}(t-1)^2$$

   y finalmente

   $$x(t) = x(1) + \int_1^t v_x(\tau)d\tau = 50 + 100(t-1) + \frac{100}{2}(t-1)^2 - \frac{100}{6}(t-1)^3$$

   con $x(3) = 950/3$ m.

   c) Para el intervalo $t : 3 \to 4$ tenemos un movimiento uniformemente acelerado con

   $$x(t) = x(3) + 100(t-3) - \frac{100}{2}(t-3)^2$$

   con $x(4) = 1100/3$ m.

   d) la ecuación final es

   $$x(t) = \left[\begin{array}{ll} \frac{100}{2}t^2 & 0 \le t \le 1 \\ 50 + 100(t-1) + \frac{100}{2}(t-1)^2 - \frac{100}{6}(t-1)^3 & 1 \le t \le 23 \\ \frac{950}{3} + 100(t-3) - \frac{100}{2}(t-3)^2 & 3 \le t \le 4 \end{array}\right.$$

   e) Para el caso de $y(t)$. Sabemos que en el intervalo $t : 0 \to 2$ tenemos un movimiento uniformemente acelerado con $y(0) = 100$,$v_o = 100$

   $$x(t) = 100 + 100t - \frac{100}{2}t^2$$

   con $y(2) = 100$ m.

f) En el intervalo $t : 2 \rightarrow 3$ tenemos un movimiento con velocidad constante

$$x(t) = 100 - 100(t - 2)$$

con $y(3) = 0$ m.

g) En el intervalo $t : 3 \rightarrow 4$ tenemos un movimiento uniformemente acelerado con

$$x(t) = -100(t - 3) + \frac{100}{2}(t - 3)^2$$

con $y(4) = -50$ m.

h) la ecuación final es

$$y(t) = \left[\begin{array}{ll} 100 + 100t - \frac{100}{2}t^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 100 - 100(t - 2) & 1 \leq t \leq 23 \\ -100(t - 3) + \frac{100}{2}(t - 3)^2 & 3 \leq t \leq 4 \end{array} \right.$$

3. La posición final es

$$\vec{r}(4) = \frac{1100}{3}\widehat{i} - 50\widehat{j}$$

Problema 3: En un ascensor tenemos una masa m en un plano inclinado de ángulo θ, pero amarrada de una cuerda como se muestra en la Fig. 5.

1. Elija un sistema de referencia y haga el diagrama de fuerzas sobre la masa para el caso que el ascensor esta acelerando
2. Si el ascensor se esta moviendo con una aceleración a, encuentre la tensión T de la cuerda
3. Para que aceleración el cuerpo se podría empezar a mover hacia arriba en el plano inclinado?

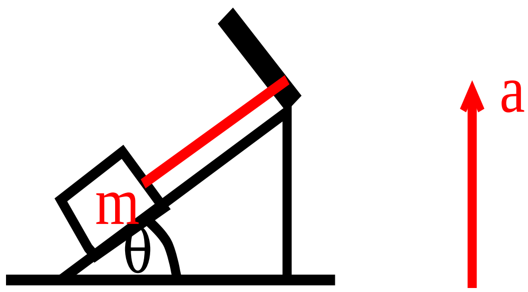

Figura 5: (a) Ascensor

Solución Problema 2:

1. En este problema tenemos que establecer un sistema inercial lejos del ascensor (ya que este es un sistema acelerado). En este caso conviene poner el sistema inercial como se muestra en la Fig. 6a.

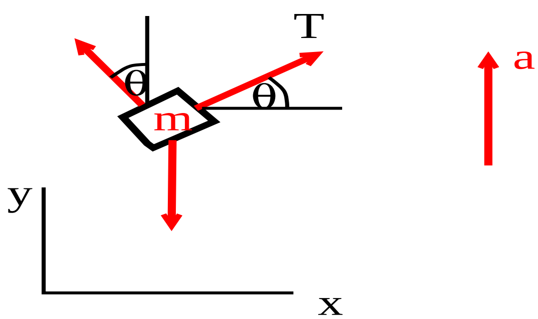

Figura 6: (a) Ascensor

2. En este sistema la 2da ley de Newton es

$$\begin{aligned} ma_x &= T\cos\theta - N\sin\theta \\ ma_y &= T\sin\theta + N\cos\theta - mg \end{aligned}$$

con la restricción que $a_x = 0$ (no hay movimiento en x) y $a_y = a$ (todo el sistema, incluyendo la masa m, se mueva con aceleración a). Podemos ahora despejar T y N, como

$$\begin{aligned} N &= T\tfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ T &= (ma + mg)\sin\theta \end{aligned}$$

3. Si queremos que el cuerpo se empiece a mover hacia arriba en el plano inclinado necesitamos hacer que la tensión (la cual sostiene al cuerpo) se haga cero. Esto es

$$a \geq -g$$

la aceleración de ascensor debería ser hacia abajo

Problema 4 Tenemos dos masas $m_1 = 15$ kg y $m_2 = 5$ kg en contacto, pero que se pueden deslizar libremente sobre una superficie sin fricción como se muestra en la Fig. 7. Si la fuerza sobre m_1 es (en Newtons)

$$\vec{F_1} = 20\hat{i} + 50\hat{j}$$

1. Haga un diagrama de fuerzas para cada masa
2. Encuentre la aceleración del sistema y el valor de todas fuerzas que actúan sobre las masas.

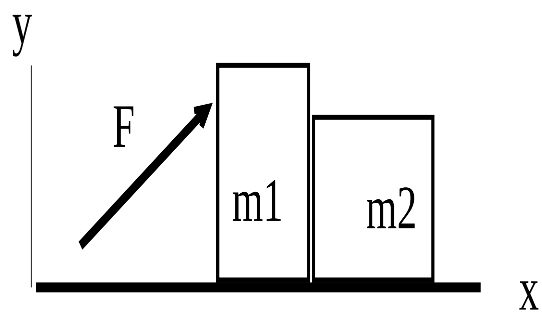

Figura 7: Dos masas.

Solucion Problema 4:

1. El digrama de fuerzas se muestra en la Fig. 8

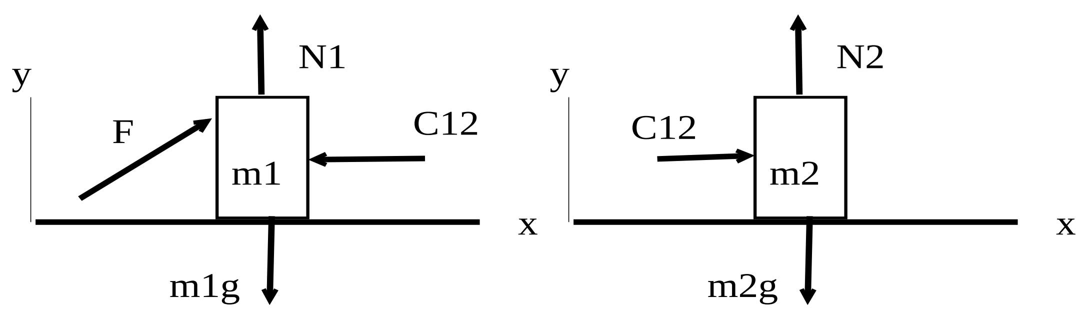

Figura 8: Diagram de Fuerzas

2. Usando el diagrama de fuerzas y asumiendo que las masas se mueven juntas $a_{1x} = a_{2,x} = a$, tenemos

$$\begin{aligned}
m_1 a &= F_x - C_{1,2} \\
m_1 a_{1,y} &= F_y + N_1 - m_1 g \\
m_2 a &= +C_{1,2} \\
m_2 a_{1,y} &= N_2 - m_2 g
\end{aligned}$$

dado que $a_{1,y} = a_{2,y} = 0$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
a &= \tfrac{F_x}{m_1+m_2} = 1 \;\; m/s^2 \\
C_{1,2} &= F_x - m_1 a = F_x \tfrac{m_2}{m_1+m_2} = 5N \\
N_1 &= -F_y + m_1 g = 100N \\
N_2 &= m_2 g = 50N
\end{aligned}
$$

Problema 5 Este es el problema de una catapulta. Tenemos dos masas $m_1 = 10$ kg y $m_2 = 100$ kg como se muestran en la Fig. 9. La cuerda y la polea tienen masa cero y no hay fricción. El plano inclinado tiene un largo de $L = 10$ m y un ángulo de $\theta = 45^o$ m/s. **Útil:** Si $ax^2+bx+c = 0$, entonces $x_\pm = (-b \pm \sqrt{b^2-4ac})/(2a)$.

1. Calcule la aceleración de las masas y la tensión en la cuerda
2. Asumamos que el sistema parte del reposo con m_1 en la parte baja del plano inclinado. Si la cuerda se corta justo cuando la masa m_1 pasa por el tope del plano inclinado, encuentre cuan lejos llega la masa. Asuma que la masa no choca con la polea.

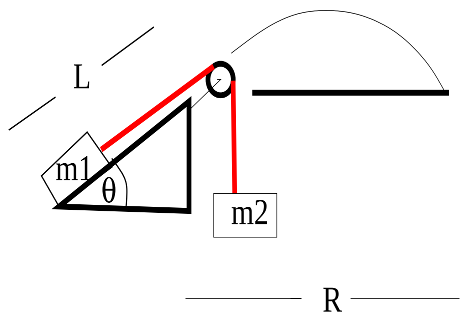

Figura 9: Diagrama de la catapulta

Solucion Problema 5:

1. El digrama de fuerzas esta dado en la Fig. 10. Por lo cual podemos construir

$$\begin{aligned} m_1 a_{1,x} &= T - m_1 g \sin\theta \\ m_1 a_{1,y} &= N - m_1 g \cos\theta \\ m_2 a_{2,y} &= m_2 g - T \end{aligned}$$

   Primero tenemos que $a_{1,y} = 0$, pero ademas $a_{1,x} = a_{2,y} = a$. Con esto podemos encontrar la aceleracion

$$a = g\frac{(m_2 - m_1 \sin\theta)}{m_1 + m_2} = g\frac{95}{110} = 8{,}46 \ \ m/s^2$$

2. Dado que recorre una distancia de $L = 10$ m, la magnitud de la velocidad al tope del plano inclinado es

$$v_f^2 = v_o^2 + 2a\Delta x \qquad \rightarrow \qquad v_f = \sqrt{2aL} = 13 \ \ m/s$$

   Esta es la velocidad inicial, con un angulo $\theta = 30^o$, para una trayectoria parabolica. Aca es conveniente cambiar de sistema de referencia a uno donde y esta orientado con la gravedad. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} x(y) &= v_f t \cos\theta \\ y(t) &= v_f t \sin\theta - \tfrac{g}{2} t^2 \end{aligned}$$

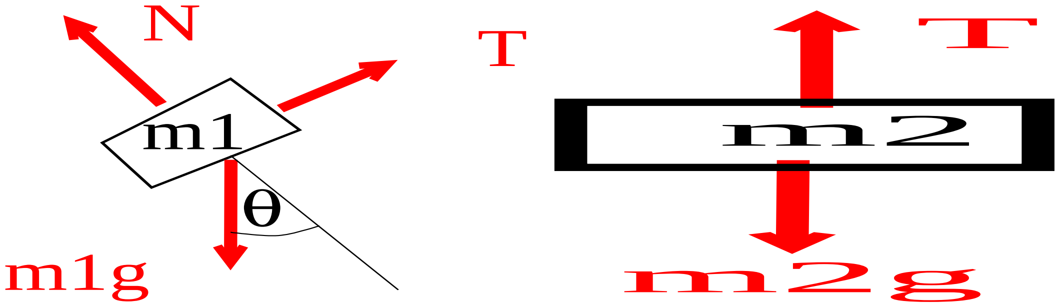

Figura 10: Diagrama de fuerzas

La distancia de propagacion, o su rango, esta dada por $y(t_s = 0)$ y por lo tanto $t_s = 2v_f \sin\theta/g$. Con esto tenemos que el rango del aparato es

$$R = x(t_s) = \frac{2v_f^2}{g} \sin\theta \cos\theta = 17 \ \ m$$

Problema 6 Supogamos que tenemos el motor de un auto que genera una fuerza F sobre un auto de masa $m = 1000$ kg. El conductor quiere saltar un precipicio de 100 m de largo usando una rampa como se muestra en la Fig. 11. Asuma que el al auto parte del reposo a una distancia de 100 m de la rampa que la modelamos como un plano inclinado de angulo $\theta = 30^o$ y largo 50 m. Asuma que la rapidez se conserva al pasar del suelo al plano inclinado. La constante de friccion es $\mu_k = 0{,}2$. Encuentre F necesaria para llegar a la rampa al otro lado del precipicio.

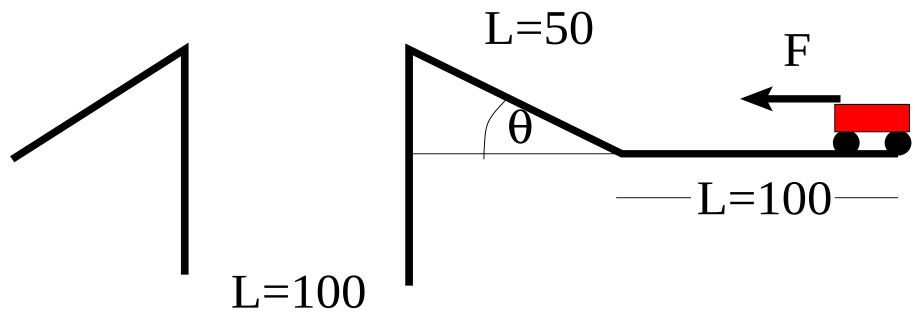

Figura 11: Auto que salta sobre el precipicio.

Solución 1: En este caso tenemos que separar en 3 intervalos (a) antes de la rampa, (b) en la rampa, (c) en el aire.

1. En el plano antes de llegar a la rampa tenemos el diagrama de fuerzas que se muestra en la Fig. 12a,

$$\begin{aligned} ma_{x,1} &= F - \mu_k N \\ ma_{y,1} &= N - mg \end{aligned}$$

   Dado que no hay movimiento en la direccion y, tenemos $N = mg$ y $a_{x,1} = F/m - \mu_k mg$. Entonces la rapidez antes de entrar a la rampa es

$$v_{f,1}^2 - v_{o,1}^2 = 2a_{x,1}(x_f - x_i) \qquad \rightarrow \qquad v_{f,1} = \sqrt{2L_1\left(\frac{F}{m} - \mu_k g\right)}$$

   con $L_1 = 100$ m.

2. Al entrar a la rampa tenemos el diagrama de fuerzas que se muestra en la Fig. 12b y entramos con una rapidez inicial de $v_{o,2} = v_{f,1}$. Las fuerzas son

$$\begin{aligned} ma_{x,2} &= F - \mu_k N - mg\sin\theta \\ ma_{y,2} &= N - mg\cos\theta \end{aligned}$$

   En este sistema de referencia no tenemos movimiento en la direccion con lo cual tenemos $N = mg\cos\theta$ y $a_{x,2} = F/m - \mu_k mg\cos\theta - mg\sin\theta$. Por lo tanto la rapidez antes de saltar de la rampa es

$$v_{f,2}^2 - v_{o,2}^2 = 2a_{x,2}(x_f - x_i) \qquad \rightarrow \qquad v_{f,2} = \sqrt{v_{f,1}^2 + 2L_2\left(\frac{F}{m} - \mu_k g\cos\theta - g\sin\theta\right)}$$

   con $L_2 = 50$ m.

3. Durante el salto la unica fuerza que actua es la graveda en un movimiento parabolico. Notemos aca que $v_{o,3} = v_{f,2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{o,3} t \cos\theta \\ y(t) &= v_{o,3} t \sin\theta - g t^2/2 \end{aligned}$$

Necesitamos llegar a la otra rampa con $y(t_r) = 0$ y $R = x(t_r)$. Esto implica que $t_r = 2v_{o,3}\sin\theta/g$ y

$$R = x(t_r) = \frac{2v_{f,2}^2}{g}\sin\theta\cos\theta$$

Finalmente queremos que $R = L_3 = 100$ m. Por lo tanto podemos resolver por F, ya que

$$\begin{aligned} 100 &= R \\ &= \tfrac{2v_{f,2}^2}{g}\sin\theta\cos\theta \\ &= \tfrac{2}{g}\left[2L_1\left(\tfrac{F}{m} - \mu_k g\right) + 2L_2\left(\tfrac{F}{m} - \mu_k g\cos\theta - g\sin\theta\right)\right]\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

Luego de poner los numeros obtenemos que

$$F = 0{,}7426 gm = 7426 \ \ N$$

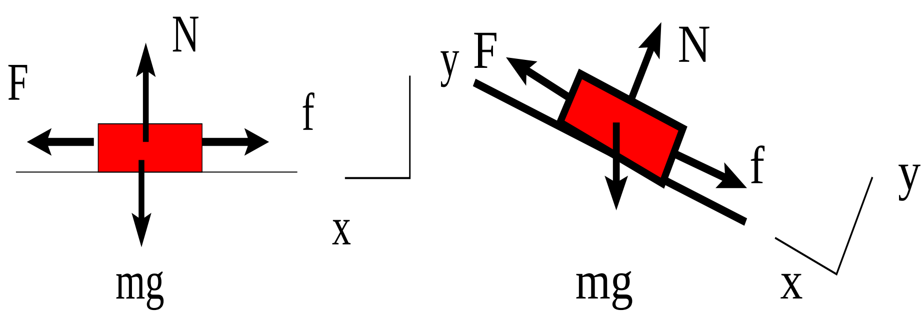

Figura 12: Diagrama de fuerzas para intervalo 1 y 2.

Problema 7: Tomemos dos masas como se observa en la Fig. 13. Supongamos que la constante de friccion estatica entre los cuerpos es $\mu_s = 0{,}5$. La masa m_1 esta girando en un circulo de radio $R = 1$ m. Cual es la maxima frecuencia angular para que la masa $m_2 = 5$ kg no se caiga.

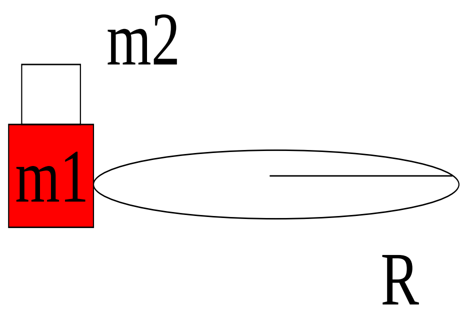

Figura 13: Diagrama de cuerpos.

Solución 7: Utilizando el diagrama de fuerzas de la Fig. 14 sobre la masa m_2 obtenemos

$$\begin{aligned} m_2 a_x &= f_s \\ m_2 a_y &= N - mg \end{aligned}$$

pero sabemos que en la direccion y no hay movimiento, por lo tanto $N = m_2 g$. Tambien sabemos que la aceleracion a_x es una aceleracion centripeta, por lo tanto

$$\begin{aligned} a_c &= a_x \\ \omega^2 R &= \tfrac{f_s}{m} \leq \tfrac{\mu_s N}{m} = \mu_s g \end{aligned}$$

entonces

$$\omega \leq \sqrt{\frac{\mu_s g}{R}} = 2{,}23 \ \ \frac{1}{s}$$

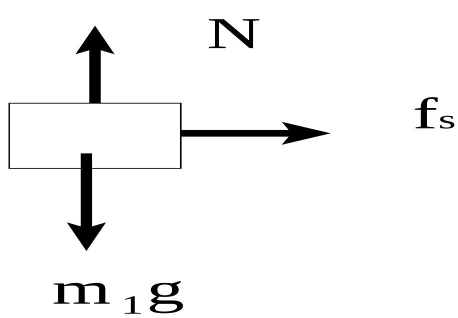

Figura 14: Diagrama de fuerzas