Problemas Capitulo 6

Profesor: *Alejandro Valdivia*

Problema: En un plano inclinado de ángulo $\theta = 30$ tenemos una masa en la configuración inicial como se muestra en la Fig. 1a. El resorte tiene constante $k = 100$ N/m y la masa $m_1 = 10$ kg. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0{,}6$ y el de fricción dinámica es $\mu_k = 0{,}3$. **Nota**: hay algunas partes que se pueden hacer sin saber la respuesta a la parte anterior.

1. **(2 punto)** Haga el diagrama de fuerzas para la masa 1. Por que la aceleración es cero? Si le damos un pequeño empujón hacia abajo a la masa, por que esta se mueve? Asuma que este empujón es lo suficientemente pequeño como para aun considerar $v_{1,0} = 0$ m/s. Luego de que se disipe la energía, la masa y el resorte llegaran a un punto de equilibrio como se muestra el la Fig. 1b. Cuanto se comprime $\Delta x_1 = |x_1 - x_e|$ el resorte con respecto a su punto de equilibrio en esta configuración?

2. **(2 puntos)** Tomemos una segunda masa $m_2 = 10$ kg que la ponemos a una distancia $L = 10$ m de m_1, como se ve en la Fig. 1b, y nuevamente le damos un pequeño empujón. Cuales son las velocidades justo antes y después de la colisión entre las dos masas? Considere la colisión elástica.

3. **(2 punto)** Cual es la posición y velocidad de m_2 entre la 1ra y 2da colisión?

4. **(2 puntos)** Cuan alto llegan las dos masas luego de la 2da colisión? Para simplificarnos la vida asumamos que $\mu_k = 0$ debajo de la posición de equilibrio x_1 de la masa m_1 y el resorte.

5. **(2 puntos)** Encuentre la distancia de máxima compresión $\Delta x_2 = |x_2 - x_e|$ de la masa m_1?

   a) Recuerde el punto 2, la masa m_1 no esta en x_e. Simplifica la vida tomar el punto de equilibrio x_e como el origen del sistema de referencia aquí.

   b) La solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $x_\pm = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$

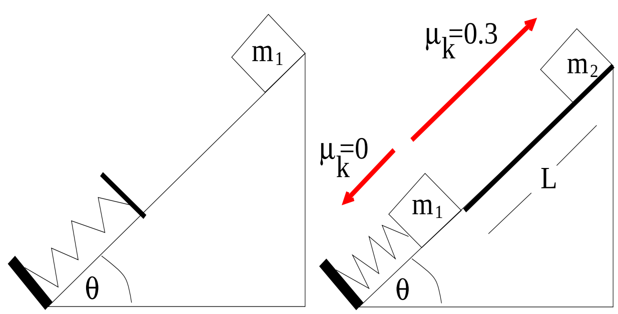

Figura 1: (a) Plano inclinado con masa 1. (b) Plano inclinado con las dos masas.

Solución Problema:

1. Usemos el diagrama de fuerzas de la Fig. 2a. La segunda ley de Newton dice

$$\begin{aligned} m_1 a_x &= f - mg\sin\theta \\ m_1 a_y &= N - mg\cos\theta \end{aligned}$$

Si el cuerpo no se mueve en la dirección y, entonces $N = mg\cos\theta$. Asumamos que inicialmente el sistema esta en reposo, actúa la fricción estática, entonces el cuerpo se moverá si $mg\sin\theta > f_{s,max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$. Dado que $0{,}52 = \mu_s \cos\theta > \sin\theta = 0{,}5$, entonces el cuerpo no se mueve. Ahora, si le damos un pequeño empujón, entonces actúa la fricción cinética, y por lo tanto ahora $mg\sin\theta > \mu_k N$ y el cuerpo se puede mover. Una vez que la masa m_1 entra en contacto con el resorte, la fricción cinética se encargara de disipar la energía cinética de este cuerpo hasta que llegue la reposo, donde el equilibrio donde las fuerzas que actúan se muestran en la Fig. 2b, y es

$$0 = m_1 a_x = k|x - x_e| - mg\sin\theta \qquad \rightarrow \qquad \Delta x_1 = |x - x_e| = \frac{mg\sin\theta}{k}$$

2. Ahora tomemos la segunda masa como se muestra en la Fig. 1b. Luego de deslizarse una distancia L, podemos encontrar la velocidad antes de la colisión usando conservación de energía

$$\begin{aligned} E_i &= m_2 gL\sin\theta \\ E_A &= \tfrac{1}{2} m_2 v_A^2 \\ E_A - E_i &= -f_k L = -\mu_k m_2 gL\cos\theta \end{aligned}$$

Notemos que pusimos el origen en la masa m_1. Podemos resolver por v_A y obtener

$$v_A = -\sqrt{2gL\left(\sin\theta - \mu_k\cos\theta\right)} = 6{,}93 m/s$$

Por lo tanto antes de la colisión tenemos

$$\begin{aligned} v_{1,A} &= 0 \\ v_{2,A} &= v_A = -6{,}93 \end{aligned}$$

En una colisión elástica de masas iguales, donde m_1 esta en reposo, tenemos inmediatamente después de la colisión

$$\begin{aligned} v_{1,D} &= v_A = -6{,}93 \\ v_{2,D} &= 0 \end{aligned}$$

esto es fácil de derivar del principio de conservación de momento y conservación de masa para masas iguales $m_1 = m_2 = m$

$$\begin{aligned} mv_{1,A} + mv_{2,A} &= mv_{1,D} + mv_{2,D} \\ \tfrac{1}{2}mv_{1,A}^2 + \tfrac{1}{2}mv_{2,A}^2 &= \tfrac{1}{2}mv_{1,D}^2 + \tfrac{1}{2}mv_{2,D}^2 \end{aligned}$$

Si las partículas intercambian momento, $v_{1,D} \rightarrow v_{2,A}$ y $v_{2,D} = v_{1,A}$ entonces claramente tenemos la solución (si las masas son diferentes, entonces el intercambiar momento no conserva la energía cinética). En este problema particular tenemos que $v_{1,A} = 0$ y la solución arriba descrita. También si ponemos $v_{1,A} = 0$ podemos resolver la cuadrática y encontrar esta misma solución.

3. Inmediatamente luego de la colisión tenemos $v_{2,D} = 0$. Dado que el máximo valor de la fricción estática es mayor que el componente de la gravedad, tenemos que el cuerpo m_2 no se mueve entre las colisiones y quedo en el punto de equilibrio Δx_1.

4. Dado que no hay fricción cinética durante el movimiento de m_1, entonces se conserva la energía y al colisionar nuevamente con m_2 (ahora en reposo) se intercambian momento nuevamente y tenemos que después de la segunda colisión elástica

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \\ v_2 &= -v_A = +6{,}93 \end{aligned}$$

pero ahora m_2 tiene una velocidad positiva (esta subiendo). Dado que la velocidad de $v_1 = 0$ queda nuevamente en su punto de equilibrio Δx_1. La masa m_2 sube y llega a una altura que podemos encontrar usando conservación de energía

$$\begin{aligned} E_i &= \tfrac{1}{2} m_2 v_A^2 \\ E_f &= m_2 g d \sin\theta \\ E_f - E_i &= -f_k d = -\mu_k m_2 g d \cos\theta \end{aligned}$$

y tenemos que

$$d = \frac{v_A^2}{2g\left(\sin\theta + \mu_k\cos\theta\right)} = L\frac{\sin\theta - \mu_k\cos\theta}{\sin\theta + \mu_k\cos\theta} = 0{,}31 \times L = 3{,}1m$$

5. Para calcular la distancia de máxima compresión, podemos usar el principio de conservación de energía para m_1 sobre la cual no hay fricción. Tenemos

$$\begin{aligned} E_i &= \tfrac{1}{2}k\Delta x_1^2 - m_1 g \Delta x_1 \sin\theta + \tfrac{1}{2} m_1 v_A^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_A^2 \\ E_f &= \tfrac{1}{2}k\Delta x_2^2 - m_1 g \Delta x_2 \sin\theta \\ E_f - E_i &= 0 \end{aligned}$$

Ya que no hay disipación. Tenemos que resolver la cuadrática

$$\frac{1}{2}k\Delta x_2^2 - m_1 g \Delta x_2 \sin\theta - \frac{1}{2} m_1 v_A^2 = 0$$

de la cual obtenemos

$$\Delta x_2 = \frac{m_1 g \pm \sqrt{m_1^2 g^2 + m_1 k v_A^2}}{k}$$

Claramente tenemos que usar la solución negativa (sabemos que $x_2 < x_e$ y entonces

$$\Delta x_2 = \frac{m_1 g - \sqrt{m_1^2 g^2 + m_1 k v_A^2}}{k} = \frac{m_1 g}{k}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{k v_A^2}{m_1 g^2}}\right) = -1{,}41m$$

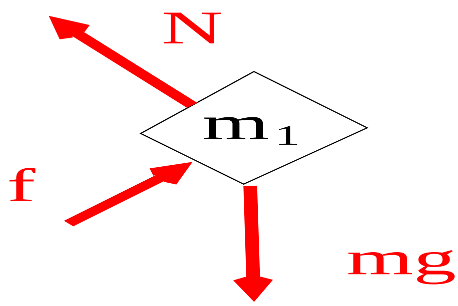

Figura 2: (a) Diagrama de Fuerzas para m_1 arriba. (b) Diagrama de Fuerzas para m_1 en contacto con el resorte.

Problema Tomemos un bote con un plano inclinado de largo $L = 2$ m y ángulo $\theta = 60^o$ como se muestra en la Fig. 3a. La base del plano inclinado mide exactamente la mitad del bote como se observa en la figura. La masa del bote con el plano inclinado es $m = 100$ kg. Si una persona de masa $m = 50kg$ se resbala en el plano inclinado, cuanto se movió el bote con respecto al agua cuando la persona llego al suelo? Asumamos que no hay fricción con el agua.

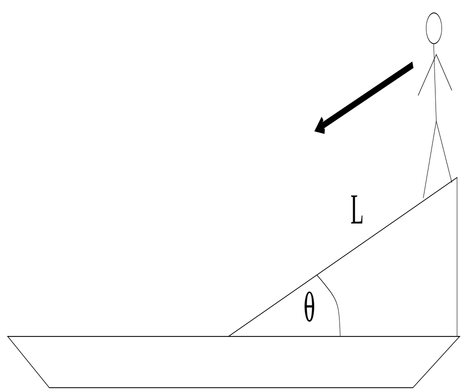

Figura 3: (a) Bote con plano inclinado

Solución Problema Este es un caso de conservación de centro de masa, pero solo en la dirección horizontal (eje x). Dado que no hay fuerzas externas en la dirección x, tenemos que la velocidad del centro de masa es constante. Inicialmente la velocidad del centro de masa es cero, por lo tanto es cero para cualquier instante. Por lo tanto tenemos que la posición (horizontal) del centro de masa es constante. Pongamos nuestro sistema de referencia en la posición inicial del centro de masa del bote. Entonces antes tenemos

$$(m_b + m_p)x_{com} = m_b x_b + m_p x_p = 0 + m_p L \cos\theta$$

El bote se mueve una distancia $x_{b,A} = d$ con respecto al agua. La persona se mueve a la posición $x_{p,b} = 0$ con respecto al bote, entonces la posición relativa con respecto al agua es

$$x_{p,A} = x_{p,b} + x_{b,A} = 0 + d$$

de tal forma que

$$(m_b + m_p)x_{com} = m_b x_b + m_p x_p = m_b d + m_p(0 + d)$$

Por lo que podemos encontrar

$$d = \frac{m_p}{m_p + m_b} L \cos\theta$$

Problema: Una situación de interés son los péndulos en colisiones. Por ejemplo, supongamos que tenemos un péndulo de masa $m_1 = m$ (la barra del péndulo tiene masa cero) en reposo como se observa en la Fig. 4 y una masa $m_2 = m$ que dejamos caer desde una altura de h_o.

1. Asumamos que la colisión es completamente inelastica (las dos masas suben juntas) y no hay fricción
   a) Cual es la velocidad antes y después de la colisión
   b) A que altura llega el péndulo en relación a h_o
2. Asumamos que la colisión es elástica y no hay fricción. A que altura llega el péndulo en relación a h_o
3. Asumamos que la colisión es elástica pero incluimos un coeficiente de fricción dinámica μ_k que actúa solo sobre una distancia $L = h_o$ como se ve en la Fig. 4.

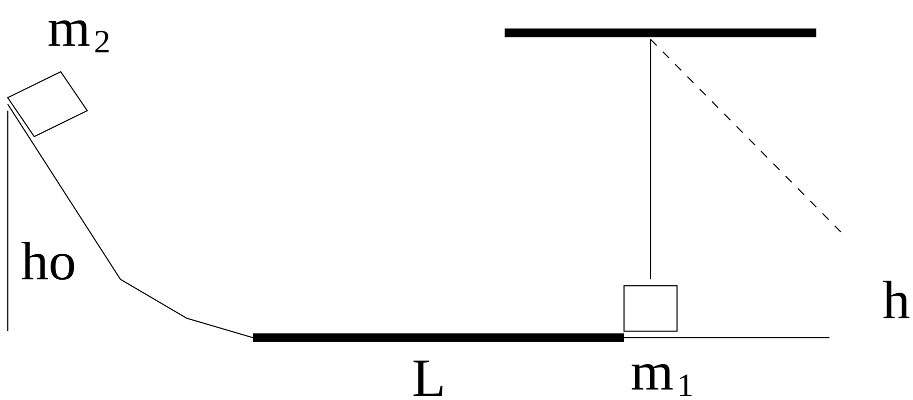

Figura 4: (a) Problema con péndulo

Solución: Para este problema tenemos que dividir el problema en tres,

1. usamos conservación de energía mecánica para m_2 hasta justo antes de la colisión
2. usamos conservación de momento desde justo antes hasta justo después de la colisión. (si además la colisión es elástica usamos conservación de energía cinética)
3. usamos conservación de energía mecánica para calcular la altura final del péndulo (la tensión no hace trabajo)

Por lo tanto:

1. En este caso usamos conservación de energía para estimar la velocidad de m_2 justo antes de la colisión

$$\begin{aligned} E_i &= m_2 g h_o \\ E_f &= \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,A}^2 \end{aligned}$$

   Por lo tanto justo antes de la colisión tenemos que

$$\begin{aligned} v_{1,A} &= 0 \\ v_{2,A} &= \sqrt{2gh_o} \end{aligned}$$

Dado que la colisión es completamente inelastica, podemos encontrar la velocidad de los dos cuerpos usando conservación de momento (no podemos usar conservación de energía cinética porque la colisión es inelastica)

$$v_{1,D} = v_{2,D} = v_D = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh_o}$$

y ahora vemos cuan alto llegan las masas usando nuevamente conservación de energía, pero para las dos masas que suben juntas,

$$\begin{aligned} E_i &= \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_D^2 \\ E_f &= (m_1 + m_2)gh \end{aligned}$$

(notemos que nunca necesitamos el largo del péndulo) y obtenemos

$$h = \frac{1}{2g}v_D^2 = \frac{m_2}{g(m_1 + m_2)^2}\frac{1}{2}m_2 v_{2,A}^2 = \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}h_o$$

o finalmente

$$h = \frac{1}{4}h_o$$

porque $m_1 = m_2$ con lo cual $h < h_o$ como es esperado ya que energía cinética se pierde en una colisiones inelastica.

2. Este caso se puede resolver de inmediato, al darnos cuenta que la energía no se disipa en ninguna parta, y que luego de la colisiones elástica m_1 sube (mientras que m_2 queda en reposo). Por lo tanto $h = h_o$.

   También se puede resolver pasa a paso. La única diferencia es que la velocidad de m_1 después de la colisiones es $v_{1,D} = v_{2,A}$ mientras que $v_{2,D} = 0$. Usando conservación de energía podemos encontrar cuan alto llega el péndulo (m_2 se queda abajo).

$$\begin{aligned} E_i &= \tfrac{1}{2}m_1 v_{1,D}^2 \\ E_f &= m_1 gh \end{aligned}$$

   y obtenemos que

$$h = \frac{1}{2g}v_{1,D}^2 = h_o$$

   lo cual tiene sentido ya que ha conservación de energía en cada instante.

3. La fricción actúa en la distancia L. En este caso tenemos que incluir en el principio de conservación de energía para m_2 antes de la colisión, el efecto de la fricción,

$$E_f - E_o = -f\Delta x = -\mu_k m_2 g L$$

Notemos que necesitamos que la energía inicial sea mayor que la energía disipada por la fricción para que alcance a chocar con la masa m_1, esto es

$$m_2 g h_o > \mu_k m_2 g L \qquad \rightarrow \qquad h_o > \mu_k L$$

lo cual se satisface en este caso porque $L = h_o$ y $\mu_k = 0{,}5$. Seguimos el mismo análisis que antes, pero con (asumimos colisiones elásticas con $m_1 = m_2$)

$$v_{1,D} = v_{2,A} = \sqrt{2g(h_o - \mu_k L)} = \sqrt{2gh_o(1 - \mu_k)}$$

Nuevamente usamos conservación de energía para obtener

$$h = \frac{1}{2g} v_{1,D}^2 = h_o(1 - \mu_k)$$

Problema Supongamos que tenemos una masa $m = 5$ kg que cuelga de un péndulo de largo $L = 2$ m y que además esta conectado a un resorte de $k = 10$ N/m anclado al suelo como se muestra en la Fig. 5a. En esta configuración el resorte tiene su largo de equilibrio. Asumamos que movemos el péndulo a un ángulo de $\theta = 30^o$ como se muestra en la Fig. 5b y lo soltamos. Cual es la velocidad de la masa al volver al punto de equilibrio?

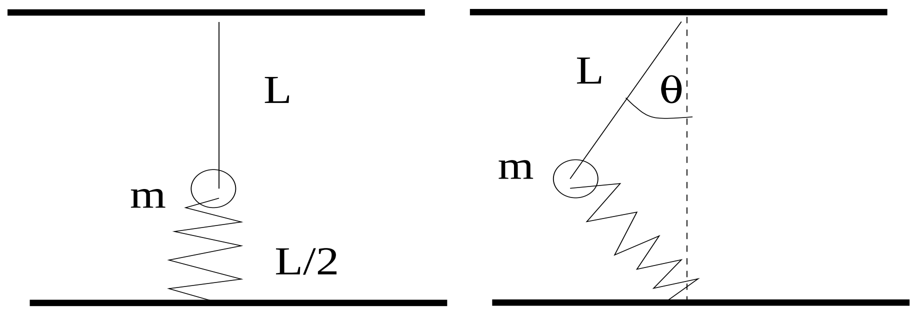

Figura 5: (a) Configuración en reposo. (b) Condición inicial.

Solución En este caso usamos conservación de energía

$$E_o = \frac{1}{2}mv_o^2 + mgh_o + \frac{1}{2}k\left(x_o - \frac{L}{2}\right)^2$$

con $v_o = 0$. Si ponemos nuestro sistema de referencia en el suelo, como se muestra en la Fig. 6, tenemos que

$$\begin{aligned} h_o &= \tfrac{L}{2} + L - L\cos\theta &&= 1{,}26\ m \\ w_o &= L\sin\theta &&= 1\ m \\ x_o &= \sqrt{w_o^2 + h_o^2} = 1{,}6\ m \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$E_o = 64\ J$$

la energía final la encontramos como

$$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg\frac{L}{2}$$

por lo tanto con $E_f = E_o$ tenemos

$$v_f = 2{,}55\ m/s$$

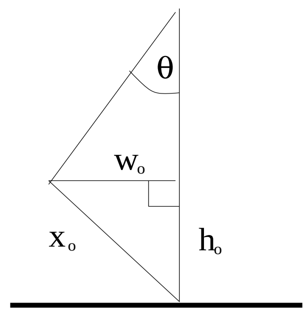

Figura 6: Triángulo rectángulo

Problema 2: (2.5 puntos) Supongamos que tenemos una masa de $m = 10$ kg dando vueltas en un circulo de radio $r = 1{,}5$ m sobre un plano. Si la masa tenia inicialmente una energía cinética de 1000 J y se detiene completamente luego de dar 2 vueltas y media. Cual es el coeficiente de fricción dinámica?

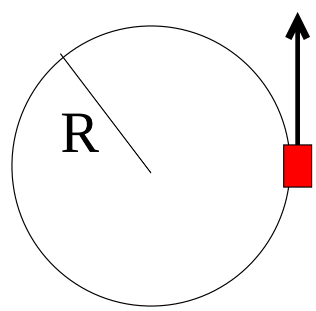

Figura 7: Movimiento en un circulo.

Solución 2: Inmediatamente nos damos cuenta que la fricción actúa en forma tangente al circulo y por lo tanto podemos usar el teorema de energía-trabajo, donde el cambio de la energía cinética es igual al trabajo hecho por la fricción.

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = -f\Delta s = -\mu_k N\Delta s = -\mu_k mg5\pi r$$

Dado que la masa recorre una distancia $\Delta s = 5\pi r$ (2 vueltas y media) para detenerse ($v_f = 0$). Tenemos finalmente que

$$\mu_k = \left(\frac{1}{2}mv_o^2\right)\frac{1}{5mg\pi r} = 0{,}43$$