Problemas Capitulo 8

Profesor: *Alejandro Valdivia*

Problema: Tomemos el disco (Yoyo) de masa m y radio R que cae como se muestra en la Fig. 1 ($I = mR^2/2$). Parte en reposo a una altura h.

1. **(1 puntos)** Haga el diagrama de fuerzas para el Yoyo. Escriba la ecuación de Newton y la ecuación para la rotación del Yoyo
2. **(1 puntos)** Encuentre la aceleración y la tensión de la cuerda
3. **(1 puntos)** Si parte del reposo. Cual es la velocidad al llegar al suelo
4. **(2 puntos)** Encuentre el mismo resultado usando conservación de energía

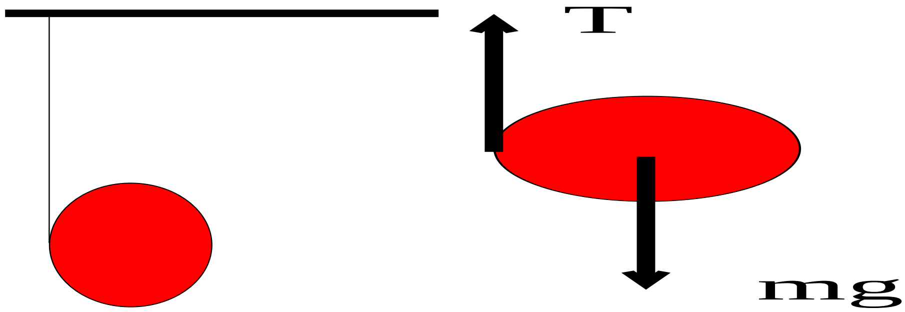

Figura 1: (a) Movimiento de Yoyo. (b) Diagrama de Fuerzas

Solución

1. El diagrama de fuerza se muestra en la Fig. 1b. Entonces las ecuaciones son

$$\begin{aligned} ma_y &= T - mg \\ I\alpha &= -RT \end{aligned}$$

con la restricción que $a_y = R\alpha$.

2. Podemos resolver las ecuaciones y obtener

$$\begin{aligned} a_y &= -g\frac{m}{m+\frac{I}{R^2}} \\ T &= mg\frac{\frac{I}{R^2}}{m+\frac{I}{R^2}} \end{aligned}$$

3. Usando

$$v_f^2 - v_o^2 = 2a\Delta y \qquad \rightarrow \qquad v_f = \sqrt{2gh\frac{m}{m+\frac{I}{R^2}}}$$

4. Usando conservación de energía tenemos

$$\begin{array}{rcl} E_i & = & mgh \\ E_f & = & \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \end{array}$$

utilizando la restricción $v = \omega R$, tenemos

$$v_f = \sqrt{2gh\frac{m}{m + \frac{I}{R^2}}}$$

Problema 2: (2 puntos) Solo hacer si termino el problema 1 Supongamos que tenemos un disco de masa m y radio R que rueda sobre una masa M como se muestran en la Fig. 2. La masa M se mueve también, pero sobre un plano sin fricción. La masa m parte del reposo a una altura h y nunca resbala sobre M. Encuentre la velocidad de m cuando llega al suelo. Asuma que $M = m$. Explique claramente por que utiliza los principios que utilice.

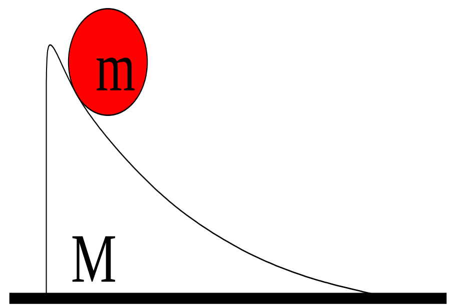

Figura 2: (a) masa m rodando sobre masa M.

Solución Podemos utilizar

1. conservación de momento en el eje x porque solo hay fuerzas de acción-reacción y por lo tanto el momento del centro de masa $P_{i,x} = P_{f,x}$ en la dirección x es igual antes y después de que se separan. En el eje y el momento del centro de masa no se conserva porque hay fuerzas externas en el eje y (la gravedad y la normal del suelo sobre M). Entonces en el eje x tenemos

$$0 = Mv_1 + mv_2$$

con v_1 y v_2 como las velocidades en el eje x luego de separarse de M y m respectivamente. Inicialmente el componente x de la velocidad del centro de masa era cero ya que todo partió del reposo.

2. La fricción que permite el rodamiento del disco sobre la masa M no hace trabajo ya que la velocidad en el punto de contacto se cero. La fuerza normal de la superficie plana sobre la masa M no hace trabajo. Los trabajos producidos por las fuerzas de acción-reacción entre m y M hacen trabajos opuestos que se cancelan al sumar las energías de cada cuerpo. Por lo tanto hay conservación de energía antes y despumes de que se separan.

$$mgh = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Dado que tenemos $v_2 = R\omega$, $p_1 = Mv_1$ y $p_2 = mv_2 = -p_1$ podemos también escribir

$$mgh = \frac{p_1^2}{2M} + \left[1 + \frac{I}{mR^2}\right]\frac{p_1^2}{2m}$$

entonces

$$v_1 = \frac{p_1}{m} = \sqrt{2gh\frac{1}{\frac{m}{M} + 1 + \frac{I}{mR^2}}}$$

Para el caso especifico de $m = M$ tenemos

$$v_1 = \sqrt{2gh\frac{1}{2 + \frac{I}{mR^2}}}$$

Problema: Tomemos una bala de masa $m = 50$ g con velocidad horizontal inicial $v_0 = 1800$ km/hr. Esta bala se incrusta en un bloque de masa $M = 0{,}95$ kg que esta a una altura de $h = 1{,}2$ m del suelo como se muestra en la Fig. 3a. Encuentre la distancia R cuando el bloque y la bala llegan al suelo.

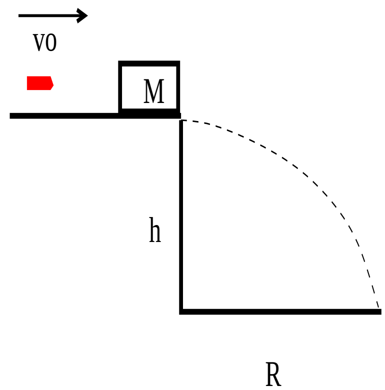

Figura 3: (a) Sistema con bala y bloque (Problema 1).

Solución Problema: En este problema tenemos una colisión perfectamente inelástica, con lo cual la velocidad de bloque con la bala inmediatamente luego de la bala es

$$mv_0 = (m+M)v_t \qquad \rightarrow \qquad v_t = \frac{m}{m+M}v_0 = 25\ m/s$$

Luego de la colisión es sistema hace movimiento parabólico.

$$\begin{aligned} x &= tv_t \\ y &= h - gt^2/2 \end{aligned}$$

Buscamos la solución $y = 0$, lo que implica que el bloque con la bala llegan al suelo $t_s = \sqrt{2h/g}$. Y por lo tanto

$$R = t_s v_t = \sqrt{2h/g}v_t = 12{,}37\ m$$

Problema: Supongamos que tenemos dos discos pegados de radio $R_2 = 2R_1 = 2$ m que actúa de polea para dos masas $m_1 = m_2 = 1$ kg como se muestra en la Fig. 4a. La polea tiene un momento de inercia $I = 5\ kgm^2$.

- Haga el diagrama de fuerzas.
- Como se relacionan a_1, a_2, α. **Ayuda: La magnitud de las aceleraciones son diferentes o iguales? Que signo debería tener α?**
- Encuentre α

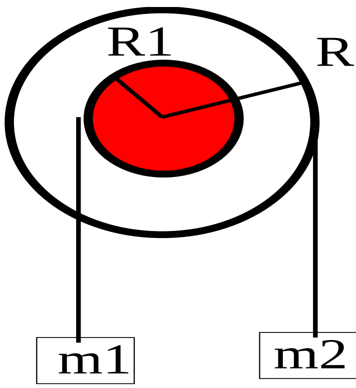

Figura 4: Máquina de Atwood (Problema 2).

Solución Problema: En este caso tenemos el diagrama de fuerzas de la Fig. 5. Con lo tenemos

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T_1 - m_1 g \\ m_1 a_2 &= T_2 - m_2 g \\ I\alpha &= T_1 R_1 - T_2 R_2 \end{aligned}$$

La relación entre las aceleraciones es

$$\begin{aligned} a_1 &= -R_1\alpha \\ a_2 &= +R_2\alpha \end{aligned}$$

ya que cuando α aumenta también lo hacer a_2. Notemos que las aceleraciones no son iguales, lo cual tiene sentido. Ahora podemos encontrar α multiplicando la primera relación por R_1, la segunda por R_2 y sumando. Para lo cual resulta

$$(m_1 R_1^2 + m_1 R_1^2 + I)\alpha = (m_1 R_1 - m_2 R_2)g$$

con lo cual tenemos

$$\alpha = g\frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I} = -1\ rad/s^2$$

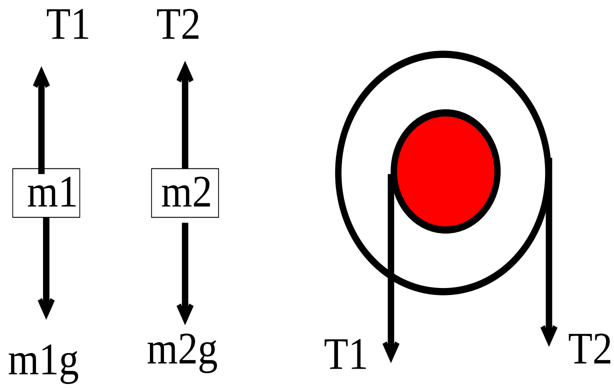

Figura 5: Diagrama de Fuerzas para la máquina de Atwood.

Problema 3: (Extra crédito 2 puntos: hacer solo si terminó los dos problemas anteriores) Supongamos que tenemos un disco de masa M que puede rodar sobre un bloque plano de masa m como se muestra en la Fig. 6. Si aplicamos una fuerza F sobre el bloque, el disco rueda sin resbalarse. Encuentre la aceleración angular del disco. **Cuidado: el centro de masa del disco no es un sistema inercial.**

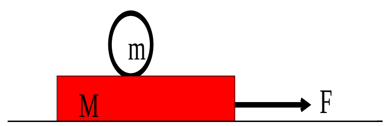

Figura 6: Sistema de disco y bloque.

Solución Problema: En este caso tenemos el diagrama de fuerzas de la Fig. 7a. Por lo cual tenemos

$$\begin{aligned} ma_1 &= F - f \\ 0 &= N_1 - mg - N \\ ma_2 &= f \\ 0 &= N - Mg \\ I\alpha_2 &= -fR \end{aligned}$$

Lo que hace difícil este problema es que la relación entre a_2 y α_2 no es trivial y que el disco no es un sistema inercial. Definiendo las variables como se muestra en la Fig. 7b, tenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= x & \rightarrow \quad & a_1 = \frac{d^2x}{dt^2} = a \\ x_2 &= x + d & \rightarrow \quad & a_2 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2d}{dt^2} = a + a_d \end{aligned}$$

Con esta relación podemos ahora establecer que

$$R\theta = -d \qquad \rightarrow \qquad R\alpha_2 = -a_d$$

Ahora podemos resolver la relación de arriba para obtener

$$\begin{aligned} a &= \frac{3F}{3m+M} \\ a_d &= -\frac{2F}{3m+M} \\ f &= -\frac{3FM}{3m+M} \end{aligned}$$

Por lo tanto f era en la dirección opuesta a lo presupuestado en el diagrama. Finalmente

$$a_2 = \frac{F}{3m + M}$$

se mueve hacia adelante como se esperaría. Y la velocidad angular es

$$\alpha_2 = -a_d = \frac{1}{R} \frac{2F}{3m + M}$$

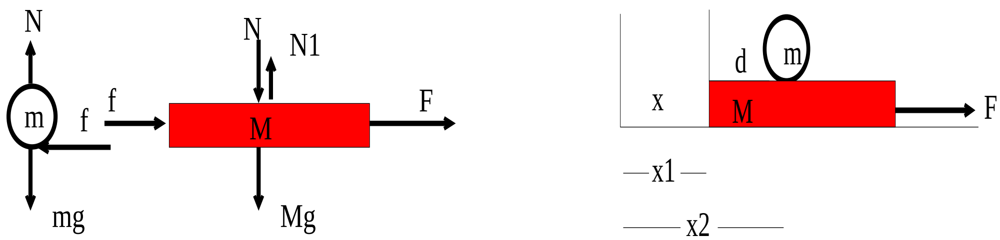

Figura 7: (a) Diagrama de fuerzas. (b) variables auxiliares.